УДК 378.147:510
JEL Classification: C6
DOI: *http://doi.org/10.34025/2310-8185-2020-1.77-2.78.10*

І.І. Дрінь, к.ф.-м.н., доцент,
https://orcid.org/0000-0002-0258-7007
Чернівецький торговельно-економічний інститут КНТЕУ,
м. Чернівці
С.С. Дрінь, к.ф-.м.н.,
https://orcid.org/0000-0002-5576-3756
Національний університет «Києво-Могилянська академія»,
м. Київ

ПРО МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ

Анотація

Актуальність. Постановка проблеми. Особливу роль в якісній університетські економічній освіті відіграє математична підготовка. Учбовий план економічного профілю складається з урахуванням сучасних міжпредметних зв’язків. Ефективність засвоєння будь якої дисципліни значно залежить від вміння лектора її доступно викладати, і зацікавити предметом, від вміння показати необхідність його вивчення для майбутньої кар’єри. При викладанні математики майбутнім економістам, фінансистам, менеджерам, екологам лектору слід підбирати та постійно поповнювати запас економічних і екологічних моделей, завдяки яким абстрактні математичні поняття формулюються економічною мовою, ілюструвати і постійно підкреслювати могутність математичної теорії при розв’язуванні та аналізі прикладних задач. Університетська освіта економіко-екологічного профілю має значні можливості вдосконалення економічної підготовки студентів, зокрема шляхом ознайомлення їх з природою основних математичних понять, необхідністю заміни інтуїтивних понять точними. якість такої підготовки прямо пропорційна якості набутих знань та умінню їх застосовувати у практичній діяльності при побудові математичних моделей реальних явищ і є актуальною проблемою послідовної математичної підготовки економістів.

Мета дослідження. Спрощені версії реального життя називаються моделями. Модель, як правило, включає в себе простір і час, в яких вона побувала, основні компоненти, які вважаються істотними для загального функціонування. Після того, як ми правильно визначили проблему і встановили її межі, ми висуваємо доступну для її перевірки гіпотезу чи серію гіпотез. Далі аналізуються і вивчаються запропоновані гіпотези. Дана праця має за мету навести методику ознайомлення з теоретичними відомостями та практичними проблемами побудови та аналізу математичних моделей, що описуються лінійними диференціальними рівняннями першого порядку.

Методологія. У процесі виконання досліджень, що описуються лінійними диференціальними рівняннями та їх системами, при розв’язуванні задачі Коші

використовується метод інтегрувального множника Ейлера. Це дасть можливість студентам краще зрозуміти і глибше засвоїти цей метод при розв'язуванні складніших диференціальних рівнянь, які зводяться до рівнянь в повних диференціалах. *Результатами* досліджень є опис процесу, розв'язування прикладних задач, які моделюються лінійними диференціальними рівняннями першого порядку, застосування методу Ейлера для ров'язування вказаних рівнянь та нерівностей.

Практичне значення. Користуючись обчислювальною машиною та математичним моделюванням, той хто знає закони природи, що лежать в основі деякого процесу чи явища, може розраховувати їх поведінку, зрозуміти напрямки їх розвитку, стабільність процесу , тощо.

Перспектива подальших досліджень. Тепер математична екологія, економіка та менеджмент мають тенденцію розширення використання комп'ютера для розв'язку задач із своїх предметних областей. Тому треба формувати у студентів навички та прийоми розв'язування задач на базі інформаційно-логічного моделювання з використанням сучасних інформаційних технологій.

Ключові слова: математична модель, лінійні диференціальні рівняння, метод Ейлера, рівняння з дробовою похідною, задача Коші.

Кількість джерел: 17; формули: 6.

Iryna Drin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor,
https://orcid.org/0000-0002-0258-7007
Chernivtsi Institute of Trade and Economic of KNTEU,
Chernivtsi
Svitlana Drin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
https://orcid.org/0000-0002-5576-3756
National University of Kyiv-Mohyla Academy,
Kyiv

ON MATHEMATICAL MODELING OF LINEAR SYSTEMS AND PROCESSES

Summary

Mathematical training plays a special role in high-quality university economic education. The economic curriculum is developed with a due regard to modern interdisciplinary ties. The effectiveness of learning any discipline depends on the lecturer's ability to teach it in an accessible and interesting way, as well as on his ability to show the necessity of learning the subject for students' future careers. When teaching Mathematics to future economists, financiers, managers, and ecologists, the lecturer should select and constantly replenish the stock of economic and environmental models, due to which the abstract mathematical concepts are conveyed in economic language. He should also illustrate and permanently emphasize the power of mathematical theory in solving and analyzing the applied problems. The university education in economics and ecology has significant opportunities for to improving students' economic training, in particular by introducing them to the nature of basic mathematical concepts and the necessity to replace intuitive concepts with accurate ones. The quality of such training is closely associated with the quality of the acquired knowledge and the ability to apply it practically, in constructing the mathematical models of real phenomena. In addition, it is a crucial issue of consistent mathematical training of economists.

The simplified versions of real life are referred to as models. The model usually includes the space and time it has arisen from, which are regarded as the components essential for their overall functioning. Once we have correctly identified the problem and set its boundaries, we put forward a hypothesis or a series of hypotheses to test the former. Next, the proposed hypotheses are analyzed and studied. This paper aims to provide the methods of introducing theoretical information and practical problems of constructing and analyzing the mathematical models described by linear differential equations of the first order.

In the course of the investigation, described by linear differential equations and their systems, the method of Euler's integrating factor is used for solving the Cauchy problem. This will enable the students to better understand and master this method when solving more complex differential equations, which come down to the equations in complete differentials. The results of the research are the description of the process, the solution of the applied problems, modeled by linear differential equations of the first order, as well as the application of Euler's method for solving these equations and inequalities.

Using a computer and mathematical modeling, those who know the laws of nature underlying any process or phenomenon, can predict their behavior, understand the directions of their development, the stability of the process, etc.

Today, Mathematical Ecology, Economics, and Management tend to expand the use of computers for solving the problems in their subject areas. Therefore, it is important to develop students' skills and techniques in this field, relying on information-logical modelling, with the use of modern information technologies.

Keywords: mathematical model, linear differential equations, the Method of Euler, equations with a fractional derivative, the Cauchy problem.

Number of sources: 17; formulas: 6.

Постановка проблеми. Моделювання - це універсальний метод наукового пізнання, що базується на побудові, дослідженні та використанні моделей об'єктів і явищ. Спеціалісти різних галузей повинні пізнавати оточуючу реальність за допомогою математичного моделювання. В останні роки, внаслідок широкого впровадження обчислювальної техніки й відповідного програмного забезпечення, а особливо персональних комп'ютерів, методи математичного моделювання набули нового розвитку і стали широко використовуватися у повсякденній практиці. Вони дали можливість формалізувати ті сфери знання, де прямий експеримент, що дозволяє зібрати повну інформацію про об’єкт, практично неможливий. Зокрема, економіко-математичне моделювання є одним із сучасних підходів для аналізу розвитку народного господарства, його галузей, підприємств.

Вивчення наведених тут моделей, які приводять до лінійних диференціальних рівнянь, варто розглядати як початкові кроки в математичному моделюванні.

Аналіз основних досліджень і публікації. Сучасна економічна наука містить багато праць зарубіжних і вітчизняних учених присвячених проблемам моделювання економіки та її сталого розвитку. Математичне моделювання економіки, галузь наукового пошуку, що передбачає опис економічних явищ і процесів за допомогою математичних моделей, їх розвитку, аналіз та адаптацію до реалізації засобами сучасних спеціалізованих прикладних програм [1, 2]. Математичні моделі екологічних та біологічних процесів описуються складними диференціальними рівняннями, що містять багато параметрів, які можуть змінюватися у певних межах. Для дослідження часто використовується метод декомпозиції – розклад вихідної задачі на ряд окремих задач. Використовується також метод агрегування – заміна групи змінних, які описують стан системи, яка називається агрегатом.

Найпершим об’єктом математичного моделювання в біології та екології була популяція. У 1202 у праці «Книга абака» Леонардо Пізанський (Фібоначчі) досліджує розвиток ідеалізованої популяції кроликів (яких на початку була пара новонароджених – самець та самка і які не помирають), кількість яких F_n на кінець *n*-го місяця виражається співвідношенням $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, $n > 2$ при відомих F_n, $n = 1, 2$. Числа F_n Едуардом Люкою були названі числами Фібоначчі [9].

Тепер математична екологія та біологія мають великий арсенал для досліджень часових закономірностей та циклічностех в системах [3].

Постановка задачі. **Задача 1.**[16] Дано резервуар об’єму *V*, що містить суміш солі і води. Припустимо, що розчин з концентрацією c_i (індекс *i* означає *input*) грамів солі на літр розчину вливається у резервуар зі сталою швидкістю r_i (індекс *i* також означає *input*) літрів за секунду і що розчин в резервуарі одразу змішується, причому відтік має сталу швидкість r_0 (індекс *0* означає *onput*) літрів за секунду. Треба знайти кількість солі *x(t)* в даний момент часу *t>0*, знаючи кількість $x(0)=x_0$ в момент часу *t*=0.

Складаємо математичну модель задачі. Фіксуємо *t* і обчислюємо зміну *Δx* протягом короткого інтервалу часу [*t, t+Δt*]. Кількість солі у розчині, що вливається в резервуар протягом часу *Δt* секунд дорівнює $r_i c_i \Delta t$ грамів. Кількість солі у розчині, що витікає у резервуар протягом того ж інтервалу часу залежить від змінної $c_0(t)$ концентрації солі у розчині в момент часу *t*: $c_0(t) = \dfrac{x(t)}{V(t)}$, де *V*(*t*) - об'єм розчину в момент часу *t*. Якщо $V(0)=V_o$, то

$$V(t) = V_0 + (r_i - r_0)t, t > 0$$

Тоді кількість солі, що витікає дорівнює r_0 $c_o(t)\Delta t$, а $\Delta x(t) = r_i c_i \Delta t - r_0 c_0(t)\Delta t$.

Середня швидкість зміни кількості солі $x(t)$ за час Δt визначається наближеною рівністю

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx r_i c_i - r_0 c_0(t), t > 0$$

Якщо усі функції є неперервними, а *x(t)* – диференційовна, то при $\Delta t \to 0$ похибка цієї апроксимації наближається до нуля і перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$ отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = r_i c_i - \frac{r_0}{V(t)} x(t), t > 0 \qquad (1)$$

яке є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Зауважимо, що r_i, c_i r_0 можуть відомим чином залежати від *t.*

Задача 2. [3,4] Закон охолодження, встановлений Ньютоном, формулюється так: швидкість $\dfrac{du(t)}{dt}$ зміни температури $u(t)$ тіла пропорційна різниці $u(t)$ та температурою навколишнього середовища *A*, тобто

$$\frac{du(t)}{dt} = -k(u - A), \text{де } k > 0 - \text{стала} \qquad (2)$$

Задача 3. [16] Модель зростання населення. Розглянемо модель зростання населення, яка враховує зміни показників народжуваності та смертності. Функція $P(t)$, буде неперервною апроксимацією фактичної чисельності населення, яка звичайно, змінюється не неперервно, а стрибками, оскільки її приростами є цілі числа.

Припустимо, що чисельність населення змінюється тільки в результаті народжень та випадків смерті, а еміграцію враховувати не будемо. Загальноприйнятним є оцінювати приріст та зменшення населення за допомогою функції – коефіцієнта народжуваності та показника смертності, визначених так: $\beta(t)$ – кількість народжень на одиницю населення за одиницю часу в момент часу *t*; $\delta(t)$ – кількість випадків смерті на одиницю населення за одиницю часу *t>0.* Тоді зміна чисельності населення ΔP протягом часового інтервалу $[t, t+\Delta t]$ довжиною Δt дорівнює

$$\Delta P \approx \beta(t)P(t)\Delta t - \delta(t)P(t)\Delta t, t > 0$$

та

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx \left[\beta(t) - \delta(t)\right]P(t), t > 0$$

Звідки можемо записати диференціальне рівняння

$$\frac{dP(t)}{dt} = (\beta - \delta)P, t > 0 \tag{3}$$

Рівняння (3) є загальним рівняння чисельності населення. Якщо β та δ є сталими, то рівняння (3) зводять до рівняння природного зростання

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t),$$

де $k = (\beta - \delta)$. Його ще називають моделлю Мальтуса. Відомим фактом є те, що по мірі зростання чисельності населення коефіцієнт народжуваності зменшується. Припустимо, що коефіцієнт народжуваності - лінійна функція, що залежить від чисельності населення *P* так, що $\beta = \beta_0 - \beta_1 P(t)$, де β_0 та β_1 – додатні константи. Якщо показник смертності $\delta = \delta_0$ залишається сталим, то рівняння (3) має вигляд

$$\frac{dP(t)}{dt} = aP(t) - bP^2(t),$$

де $a = \beta_0 - \delta_0, b = \beta_1$. Якщо коефіцієнти *a* та *b* додатні, то рівняння (3) називають логістичним рівнянням, яке не є лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку.

Задача 4. Часто складний процес або систему можна розбити на більш прості підсистеми або частини, які можуть бути проаналізовані окремо. Іноді трапляється, що кожну окрему підсистему можна описати одним диференціальним рівнянням, тоді модель всієї фізичної системи може бути подана системою диференціальних рівнянь. Простим прикладом є система з трьома каскадами [16].

Розглянемо три баки із сумішами. Нехай суміш – це суміш солі та води. Кожен бак містить V_1, V_2 та V_3 літрів суміші відповідно. В бак 1 вливається прісна вода, перемішаний розчин виливається з бака 1 в бак 2, з баку 2 у бак 3 та витікає з баку 3. Позначимо через $x_i(t)$ кількість (в кілограмах) солі у баку *i* в момент часу *t* для *i*=1,2,3. Якщо в кожен бак вливається та виливається *r* літрів на хвилину, то маємо систему першого порядку

$$\begin{cases} x_1'(t) = -h_1 x_1(t) \\ x_2'(t) = h_1 x_1(t) - h_2 x_2(t) \\ x_3'(t) = h_2 x_2(t) - h_3 x_3(t) \end{cases},$$

де $h_i = \frac{r}{V_i}, i = 1, 2, 3, t > 0$

Розглянемо «замкнену» систему, що складається з трьох баків з об'ємами V_1, V_2 та V_3. Відмінність цієї системи від попередньої в тому, що вода, яка виливається з баку 3, вливається в бак 1. Тоді система лінійних диференціальних рівнянь, що описує цю систему має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -h_1 x_1(t) + h_3 x_3(t) \\ x_2'(t) = h_1 x_1(t) - h_2 x_2(t) \\ x_3'(t) = h_2 x_2(t) - h_3 x_3(t) \end{cases},$$

де $h_i = \frac{r}{V_i}, i = 1, 2, 3, t > 0$

Виклад основного матеріалу. **Лінійні рівняння. Метод Ейлера.**

Рівняння вигляду

$$y(x)' + p(x)y(x) = g(x),\, x \in (a,b) \tag{4}$$

де $p(x), g(x)$ – відомі функції, називається лінійним. Якщо $g(x) \equiv 0,\, x \in (a,b)$

то рівняння (4) називається лінійним однорідним, а вихідне рівняння – лінійним неоднорідним.

Теорема: Якщо $p(x), g(x)$ є неперервними для $x \in (a,b)$, то рівняння (4) має єдиний розв'язок $y = y(x),\, x \in (a,b)$ який задовольняє початкову умову $y = y_0$ при $x = x_0$, де $x \in (a,b),\, y \in \square$ – довільне.

Загальний розв'язок рівняння (4) можна шукати у вигляді добутку двох функцій $u(x)v(x)$ та методом варіації сталої, який належить Лагранжу [4]. А Ейлер запропонував метод інтегрального множника $\mu(x) = exp\left\{\int p(x)dx\right\}$ [8]. Домножимо (4) на $\mu(x)$ і дістанемо рівняння

$$y(x)' exp\left\{\int p(x)dx\right\} + p(x)y(x)exp\left\{\int p(x)dx\right\} = g(x)exp\left\{\int p(x)dx\right\},$$

ліва частина якого є точна похідна від функції $y(x)exp\left\{\int p(x)dx\right\}$, тобто рівняння (4) набуде вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)exp\left\{\int p(x)dx\right\}\right] = g(x)exp\left\{\int p(x)dx\right\}$$

З останнього рівняння знаходимо загальний розв'язок

$$y(x) = exp\left\{-\int p(x)dx\right\}\left[C + \int g(x)exp\left\{\int p(x)dx\right\}dx\right]. \tag{5}$$

Зауваження 1. У формулі (5) можна замінити невизначені інтеграли визначеними інтегралами зі змінною верхньою межею інтегрування. Тоді отримаємо, що

$$y(x) = exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau\right\}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} g(\xi)exp\left\{\int_{x_0}^{\xi} p(\tau)d\tau\right\}d\xi\right], \tag{6}$$

де $x_0 \in (a,b)$, а $y(x_0) \equiv y_0$

Зауваження 2. Формула (6) показує, що при неперервних $p(x)$ і $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, розв'язок є неперервно диференційовним у всій площині $\mathbb{R}^2$, тобто інтегральна крива, що проходить через довільну точку x_0, y_0 є гладкою кривою для цих $x \in \mathbb{R}$.

Формулу (6) можна подати у вигляді

$$y(x) = y_0 exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\,d\tau\right\} + \int_{x_0}^{x} g(\xi) exp\left\{-\int_{\xi}^{x} p(\tau)\,d\tau\right\} d\xi .$$

Лінійні нерівності. Нехай $y(t) \ge 0$, абсолютно неперервна функція, яка майже для всіх $t \in [0, T]$ задовольняє нерівність

$$\frac{dy(t)}{dt} \le C_1(t)y(t) + C_2(t),$$

де $C_1 \ge 0, i = 1, 2$ - сумовні на $[0, T]$ функції. Тоді

$$y(t) \le \exp\left\{-\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}\left[y(0) + \int_0^t C_2(\xi)\exp\left\{-\int_0^{\xi} C_1(\tau)\,d\tau\right\}d\xi\right] \le$$

$$\le \exp\left\{\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}\left[y(0) + \int_0^t C_2(\tau)\,d\tau\right]$$

Для доведення домножуємо вихідну нерівність на $\exp\left\{-\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}$ і отримуємо нерівність

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\exp\left\{-\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}\right] \le C_2(t)\exp\left\{-\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}$$

яку інтегруємо від 0 до *t.*

Основний висновок - розв'язок $y(t)$ є стійким за даними задачі $y(0)$ та $C_2(t)$, адже їх малим змінам відповідає мала зміна розв'язку.

Рівняння з дробовою похідною. Якщо якесь поняття добре працює при звичайних умовах, виникає бажання розповсюдити його на ширшу область. Ще при визначенні похідних цілого порядку Ньютон і Лейбніц задумувалися над визначенням похідних дробового порядку. Наведемо такі міркування. Добре відома формула

$$\frac{d^n}{dx^n}x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)}x^{k-n}$$

диференціювання степеневої функції може бути використана для тлумачення похідної дробового порядку $n=\frac{1}{2}$ при $k=1$ Справді, змінивши у цій формулі формально ціле n на дробове число $\frac{1}{2}$, отримаємо, що

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\pi}$$

Тоді рівняння

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x - 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} = 0$$

має розв'язок $y=x$.

Строге означення та фізичне тлумачення дробових похідних та інтегралів можна знайти в [17]. Якщо записати

$$1 = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x\right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)$$

то ясно, що $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)=1$ і це строго доводиться.

Висновки. Сьогодні екологи, економісти, фінансисти, менеджери мають у своєму розпорядженні два інструменти: обчислювальна машина та математика. Користуючись обчислювальною машиною, той хто знає закони природи, що лежать в основі цього процесу чи явища, може розраховувати їх поведінку. Але навіть проста математика може дати споживачу більше, ніж числові результати розрахунків на персональному комп'ютері. Це насамперед – розуміння процесу, напрям його розвитку, стабільність процесу, тощо.

Працюючи в галузі освіти, ми шукаємо шляхи ефективного розвитку у студентів підприємницьких здібностей, які підготували б їх до життя в сучасних умовах. Ці здібності включають в себе такі особисті якості та навики, котрі пов’язані з розвитком творчої думки, ініціативи, вміння вирішувати проблеми, які постають перед ними, швидку і легку адаптацію до ситуації. Є потреба на всіх етапах математичної освіти дбати не тільки про виклад фактичного матеріалу, а й про ґрунтовне розкриття методологічних питань математики [1, 2, 6, 10-16].

«Гарний економіст є рідкісним птахом…Він повинен бути математиком, істориком, державним діячем, філософом. Він повинен розуміти символи і говорити словами». Джон Мейнард Кейнс [13].

Список використаних джерел:

1. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов / В.А. Колемаев. М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

2. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе: Учеб. пособие для вузов / С.И. Шелобаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 367 с.

3. Самойленко А.М. Диференціальні моделі. Стійкість: навчальний посібник/ А.М. Самойленко, С.Д. Борисенко, Дж.Матараццо та інші.-К.: Вища школа, 2000.-329 с.

4. Дубовик В.П. Вища математика: навчальний посібник /В.П. Дубовик, І.І. Юрик. –К.: А.С.К., 2005.- 648 с.

5. Дрінь І.І. Диференціальні рівняння: методи та застосування: навчальний посібник / І.І.Дрінь, С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, П.П Настасієв.- Чернівці. Рута, 2010 - 288 с. *(з грифом МОНУ)*

6. Шкіль М.І. Вища математика: навчальний посібник/ М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1986.-512 с.

7. Шкіль М.І. Вища математика: навчальний посібник/ М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1985.-391 с.

8. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений/ Н.М. Матвеев.- М.: Высшая школа, 1967.-565 с.

9. Ляшенко І. Моделювання біологічних та екологічних процесів: Навч. посібник / І.Ляшенко, А.Мукоед. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2000. - 340 с.

10. Станжицький О.М. Основи математичного моделювання: Навч. посібник / О.М. Станжицький, Є.Ю. Таран., Л.Д. Городинський. – К.: Видавничо-полграфічний центр «Київський університет», 2006. – 96 с.

11. Кротов В.Д. Основы оптимального управления/ В.Д. Кротов. – М.: Высшая школа, 1982.-565 с.

12. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей/ Д. Гейл. –М.: ИЛ., 1963.-418 с.

13. Сучасні проблеми математики: Матеріали Міжнародної наукової конференції. Частина 4 – Чернівці: Рута, 1998. – 224 с.

14. Маценко В.Г. Математичне моделювання: навчальний посібник / В.Г. Маценко. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2014. – 519 с.

15. Григорків В.С. Моделювання економіки: навчальний посібник/ В.С.Григорків.- Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. – 320 с.

16. Дичка І.А. Математичне моделювання систем і процесів: комп’ютерний практикум [Електронний ресурс]: навч. посібник для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного

забезпечення», спеціалізації «Програмне забезпечення комп'ютерних та інформаційно-пошукових систем»/ Дичка І.А.Дичка, М.В.Онай, Р.А. Гадиняк.- Київ: КПІ ім.Ігоря Сікорського, 2019.-130 с.

17. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры тз бесконечного рая/ М. Шредер.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.-528 с.

References:

1. Kolemaev, V.A. (1998) Matematicheskaya ekonomika [Mathematical Economics]. UNITI, Moskva, 240 c. (in Rus.).
2. Shelobaev S.I. (2000) Matematicheskiye metody I modeli v ekonomike, finansah i bisnese [Mathematical Methods in Economics, Finance and Business]. UNITI, Moskva, 367 c. (in Rus.).
3. Samoilenko A.M. (2000) Dyferentsialni modeli. Stiykist [Differential Models. Stability]. Vyshcha shkola, Kyiv, 329 c. (in Ukr.)
4. Dubovyk V.P. (2005) Vyshcha matematyka [Higher Mathematics]. A.S.K., Kyiv, 648 c. (in Ukr.).
5. Drin I.I. (2010) Dyferentsialni rivniannia: metody ta zastosuvannia [Differential Equations: Methods and Application]. Ruta, Chernivtsi, 288 c. (in Ukr.).
6. Shkil M.I. (1986) Vyshcha matematyka [Higher Mathematics]. Vyshcha Shkola, Kyiv, 512 c. (in Ukr.).
7. Shkil M.I. (1985) Vyshcha matematyka [Higher Mathematics]. Vyshcha Shkola, Kyiv, 391 c. (in Ukr.)
8. Matveev N.M. (1967) Metody integrirovaniya obyknovennyh differentsialnyh uravneniy [Methods of Integrating the Ordinary Differential Equations]. Vysshaya shkola, Moskva, 565 c. (in Rus.).
9. Liashenko I.M. (2000) Modeliuvannia biolohichnykh ta ekolohichnykh protsesiv [Modeling of Biological and Ecological Processes]. Kyivskyi universitet, Kyiv, 340 c. (in Ukr.).
10. Stanzhytskyi O.M. (2006) Osnovy matematychnoho modeliuvannia [Basic of Mathematical Modeling]. Kyivskyi universytet, Kyiv, 96 c. (in Ukr.).
11. Krotov V.D. (1982) Osnovy optimalnogo upravleniya [Basics of Optimal Management]. Vysshaya shkola, Moskva, 565 c. (in Rus.).
12. Gail D. (1963) Teoriya lineinyh ekonomicheskih modelei [Theory of Linear Economic Models]. IL, Moskva, 418 c. (in Rus.).
13. Suchasni problemy matematyky (1998) Materialy Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii [Contemporary Problems of Mathematics Mat. of Sci. Prac. Conf.]. Chernivtsi, Ukraine, 224 c. (in Ukr.)
14. Matsenko V.H. (2009) Matematychne modeliuvannia [Mathematical Modeling]. Chernivetskyi nats. universytet, Chernivtsi, 519 c. (in Ukr)
15. Hryhorkiv V.S. (2009) Modeliuvannia ekonomiky [Modeling of Economy]. Chernivetskyi nats. Universytet, Chernivtsi, 320 c. (in Ukr)
16. Dychka I.A. (2019) Matematychne modeliuvannia system I protsesiv [Mathematical Modeling of Systems and Processes]. KPI im. Ihoria Sikorskoho, Kyiv, 130 c. (in Ukr)
17. Schreder M. (2001) Fraktaly, haos, stepennye zakony. Miniatiury iz bezkonechnogo raya [Fractals, Chaos, Degree Laws. Miniatures from Endless Paradise]. NITS "Reguliarnaya i haoticheskaya dinamika", Izhevsk, 528 c. (in Rus.).