УДК 517.956.4

І. І. Дрінь, к.ф.-м.н, доцент,
Чернівецький торговельно-економічний інститут КНТЕУ,
м. Чернівці

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКОНОМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ З ДИНАМІЧНОЮ ПАМ'ЯТТЮ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Анотація

Дослідження рівнянь з дробовими похідними із запізненням – актуальне завдання, бо вони є надзвичайно плідним полем для досліджень та джерелом для багатьох складних математичних проблем та цікавих застосувань. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при моделюванні економічних процесів з динамічною пам'яттю, процесів теплопровідності, фільтрації, дифузії, фізики плазми, реконструкції зображень, теорії біологічних популяцій, реакції організму людини на вірус імунодефіциту та інших. Похідні нецілого порядку тлумачаться як економічні характеристики (індикатори), проміжні між середнім і граничним індикаторами. При дослідженні задач для рівнянь з дробовими похідними і запізненням важливу роль відіграє метод інтегральних перетворень з використанням операторів дробового диференціювання та інтегрування.

Для квазілінійного псевдодиференціального рівняння з дробовою похідною за часовою змінною t порядку $\alpha \in (0, 1]$, псевдодиференціальним оператором за просторовою змінною x побудованого за символом $|\sigma|$ і з відхиленням аргумента методом кроків доводиться розв'язність крайової задачі по змінній t з двома шуканими функціями.

Ключові слова: еволюційні псевдодиференціальні рівняння, нелокальна багатоточкова за часом задача, псевдодиференціальні рівняння з відхиленням аргументу, економічні процеси з динамічною пам'яттю, економічні індикатори.

И. И. Дринь, к.ф.-м.н, доцент,
Черновицкий торгово-экономический институт КНТЭУ,
г. Черновцы

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДИНАМИЧЕСКОЙ ПАМЯТЬЮ, КОТОРЫЕ ОПИСЫВАЮТСЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ОТКЛОНЕНИЯЕМ АРГУМЕНТА

Аннотация

Исследование уравнений с дробными производными с опозданием являются актуальным заданием, так как они чрезвычайно плодотворны для исследований и рассматриваются как источник многих сложных математических проблем. Популярность такого рода исследований объясняется их активным использованием при моделировании экономических процессов с динамической памятью, процессов теплопроводимости, фильтрации, диффузии, физики плазмы, реконструкции изображений, теории биологических популяций, реакции организма человека на вирус иммунодефицита человека и других. Производные нецелого порядка трактуются как экономические характеристики (индикаторы), промежуточные между средним и граничным индикаторами. При исследовании задач для уравнений с дробными производными с опозданием важная роль отводится методу интегральных преображений с использованием операторов дробного дифференциирования и интегрирования.

Для квазилинейного псевдодифференциального уравнения с дробной производной по временной переменной t порядка $\alpha \in (0, 1]$, псевдодифференциальным оператором по пространственной переменной x построенного по символу $|\sigma|$ и с отклонением аргумента методом шагов доказывается разрешимость краевой задачи по переменной t с двумя искомыми функциями.

Ключевые слова: эволюционные псевдодифференциальные уравнения, нелокальная по времени задача, псевдодифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, экономические процессы с динамической памятю, экономические индикаторы.

Постановка проблеми. Задачі для рівнянь з дробовими похідними і запізненням. Рівняння з частинними похідними описують рух рідин, газів і твердих тіл, розповсюдження тепла в середовищах, явище дифузії атомів у молекулі і при цьому значення рівняння з частинними похідними для фізики є настільки великим, що ці рівняння називають дуже часто рівняннями математичної фізики. При дослідженні задач для таких рівнянь важливу роль відіграє метод інтегральних перетворень з використанням операторів дробового диференціювання та інтегрування [1-3]. Книга [2] охоплює майже весь спектр публікацій з дробового інтегро-диференціювання та їх застосування, відомими та той час. Прикладні аспекти дробового числення викладені в книгах [4; 5], де є широкий список літератури із застосуваннями до хімічної фізики, гідрології, випадкових процесів, теорії гравітації і ін. У праці [6] описано мікроекономічне тлумачення похідних нецілого порядку. для цього використовується економічний індикатор, який узагальнює поняття середньої і граничної (маргінальної) величин за рахунок врахування ефектів пам’яті. При цьому середня і гранична величини є частинним випадками запропонованого індикатора, коли його порядок дорівнює нулю і одиниці відповідно.

При моделюванні процесів електромагнетизму, наприклад, виникає важливий факт: існує запізнення взаємодії, тобто передача взаємодії із скінченною швидкістю (близької до швидкості світла). Дія одного заряду на другий в момент t залежить від положення і швидкості першого заряду в деякий попередній момент часу $t - \tau$, віддалений від t на величину τ. Тому дослідження рівнянь з дробовими похідними із запізненням – це актуальне завдання, бо вони є надзвичайно плідним полем для досліджень та джерелом для багатьох складних математичних проблем та цікавих застосувань. Популярність такого роду досліджень пов’язана з їх активним використанням при моделюванні процесів теплопровідності, фільтрації, дифузії, фізики плазми, реконструкції зображень, теорії біологічних популяцій, реакції організму людини на вірус імунодефіциту та інших.

Рівняння з аргументом, що відхиляється, описують багато процесів з післядією, коли в досліджуваній фізичній чи технічний задачі сила, що діє на матеріальну точку, залежить від швидкості і положення цієї точки не лише в даний момент, але і в деякий момент, що передує даному [7].

У даній праці продовжується дослідження крайової задачі по змінній t, розпочатого в [8]. Крайова задача по змінній t для рівняння фрактальної дифузії з аргументом, що відхиляється, де замість диференціального рівняння розглянуто псевдодиференціальне по змінній x рівняння з символом $|\sigma|$, негладким при $\sigma = 0$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Параболічні псевдодиференціальні рівняння з негладкими символами введені С. Д. Ейдельманом і Я. М. Дрінем [9] і ними розпочато дослідження задачі Коші для таких рівнянь. Тлумачення псевдодиференціальних операторів (ПДО) через гіперсингулярні інтеграли (ГСІ) провів А. Н. Кочубей в [10]. При цьому за відомим символом ПДО будується символ ГСІ і навпаки. У працях Я. М. Дріня і підсумованих в [11] побудована теорія нелокальних багатоточкових задач для еволюційних ПДР, а також обґрунтоване застосування методу кроків для розв’язування задачі Коші і нелокальних задач для ПДР з відхиленням аргумента.

Постановка завдання. Визначити класичний розв’язок крайової задачі:

$$D_t^{\alpha} u(t,x) + A_1 u(t,x) + B(t) p(t,x) =$$
$$= f(t,x,u(t-h,x)), t > h, x \in \mathrm{R}, \alpha \in (0,1) \qquad (1)$$
$$u(t,x)|_{0 \le t \le h} = u_0(t,x), x \in \mathrm{R}, \qquad (2)$$
$$u((k+1)h,x) = \varphi(x), x \in \mathrm{R}, k \in \mathrm{N}, \qquad (3)$$
$$D_t^{\alpha} u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} [\frac{\partial}{\partial t} \int_h^t \frac{u(\tau,x) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - \frac{u_0(h,x)}{(t-\tau)^{\alpha}}]$$

– регуляризована дробова похідна Рімана-Ліувілля порядку $\alpha \in (0,1]$, $t > h$, $x \in \mathrm{R}$, h – число, $A_1 u(t,x)$ – псевдодиференціальний оператор із символом $|\sigma|$, який на гладких і спадних функціях визначається так

$$A_1 u(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[|\sigma| F_{x\to\sigma}[u(t,x)]],$$

а на гладких і обмежених функціях визначається як гіперсингулярний інтеграл [9], *f*, *B*, u_0, φ – відомі функції, *u*, *p* – невідомі функції,

$$F_{x\to\sigma}[u(t,x)](\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}u(t,x)dx \equiv \tilde{u}(t,\sigma), \sigma\in\mathrm{R},$$

$$F_{\sigma\to x}[\tilde{u}(t,\sigma)](x) = F_{x\to\sigma}[u(t,x)](-\sigma), \sigma\in\mathrm{R}$$

відповідно пряме і обернене перетворення Фур″є [11].

Виклад основного матеріалу. Для фундаментального розв'язку часово і просторово фрактальних операторів розглянемо рівняння:

$$(D_t^\alpha + A_1)G(t,x;\alpha) = \delta(x)\delta(t), \alpha > 0,$$

де δ є дельта-функція Дірака. Розв’язок $G(t,x;\alpha)$ цього рівняння називається фундаментальним розв'язком оператора $D_t^\alpha + A_1$. Застосовуючи перетворення Фур’є, Лапласа, Мелліна [2], отримуємо, що

$$G(t,x;\alpha) = \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}\,|x|} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|}{2t^\alpha}\middle| \begin{matrix}(1,1); & (\alpha,\alpha)\\ (1,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}); & (1,\frac{1}{2})\end{matrix}\right), \tag{4}$$

тобто виражається через H -функцію Фокса.

Зауважимо, що при $\alpha = 1$ вираз (4) для $G(t,x;1)$ спрощується до

$$G(t,x;1) = \frac{t}{\pi|x|^2} H^{1,1}_{1,1}\left(\frac{t^2}{|x|^2}\middle| \begin{matrix}(0,1)\\(0,1)\end{matrix}\right), t>0, x\in\mathrm{R},$$

яка є розподілом Коші

$$G(t,x;1) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}, \quad t>0, x\in\mathrm{R}. \tag{5}$$

Фундаментальний розв’язок (5) вперше побудований С. Д. Ейдельманом і Я. М. Дрінем у [9].

Розв'язування задачі Коші. Першим кроком розв'яжемо задачу

$$D_t^\alpha u(t,x) + A_1 u(t,x) = f(t,x;u(t-h,x)), t>h, x\in\mathrm{R}, \tag{6}$$

$$u(t,x)|_{0\le t\le h} = u_0(t,x). \tag{7}$$

Означення. Нехай $0<\alpha\le 1$. Тоді функція u є класичним розв'язком задачі Коші (6), (7), якщо:

1) $u\in C_x^1(\Pi)$, $\Pi = (0,T)\times\mathrm{R}$, $T >> h$;

2) для довільного $x\in\mathrm{R}$ дробовий інтеграл

$$I_t^{1-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u(\tau,x)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$$

є неперервно диференційовною функцією по $t>0$ і $x\in\mathrm{R}$;

3) функція u задовольняє рівняння (6) для довільного $t > h$, $x \in \mathrm{R}$ і початкову умову (7) для довільних t, x, де $0 \le t \le h$, $x \in \mathrm{R}$.

Задача Коші (6), (7) розв'язана методом кроків у [13]. Нехай $h \le t \le 2h$, $x \in \mathrm{R}$, а функції u_0, f належать до класу $L_1(\mathrm{R})$. Тоді задача (6), (7) зводиться до задачі Коші для рівняння без відхилення аргументу, бо при $h \le t \le 2h$ функція $u(t-h,x) = u_0(t,x)$ і задача (6), (7) набуває вигляду

$$D_t^\alpha u(t,x) + A_1 u(t,x) = f(t,x;u_0(t-h,x)), \tag{8}$$

$$u(t,x)|_{t=h} = u_0(t,x), x \in \mathrm{R}. \tag{9}$$

Застосувавши перетворення Фур'є до (8), (9), оскільки функції f та u_0 належать до класу $L_1(\mathrm{R})$, отримаємо задачу

$$D_t^\alpha \tilde{u}(t,\sigma) = -|\sigma|\tilde{u}(t,\sigma) + \tilde{F}(t,\sigma,h), h < t < 2h, \sigma \in \mathrm{R}, \tag{10}$$

$$\tilde{u}(t,\sigma)|_{t=h} = \tilde{u}_0(\sigma,h), \sigma \in \mathrm{R}. \tag{11}$$

де

$$\tilde{F}(t,\sigma,h) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-h)^{-\alpha}\tilde{u}_0(h,\sigma) + \tilde{f}(t,\sigma,h), h < t < 2h, \sigma \in \mathrm{R}.$$

Розв'язок задачі (10), (11) записується у вигляді

$$\tilde{u}(t,\sigma) \equiv \int_h^t \frac{E_{\alpha,\alpha}(-|\sigma|(t-\tau)^\alpha)d\tau}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}(t-h)^\alpha}\tilde{u}_0(h,\sigma) +$$

$$+\int_h^t \frac{E_{\alpha,\alpha}(-|\sigma|(t-\tau)^\alpha)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\tilde{f}(\tau,\sigma,h)d\tau \equiv$$

$$\equiv Q_1(t,\sigma,\alpha,h)\tilde{u}_0(h,\sigma) + \int_h^t Q_2(t-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma,h)d\tau, \tag{12}$$

де

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

є функцією Міттаг-Леффлера. Функції Q_1 та Q_2 із (12) набувають вигляду

$$Q_1(t,\sigma,\alpha,h) = E_{\alpha,1}(-|\sigma|(t-h)^\alpha), t > h, \sigma \in \mathrm{R}, \tag{13}$$

$$Q_2(t,\sigma,\alpha,h) = (t-h)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-|\sigma|(t-h)^\alpha), t > h, \sigma \in \mathrm{R}. \tag{14}$$

Позначимо $G_i(t,x,\alpha,h) \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[Q_i(t,\sigma,\alpha,h)]$, $i = 1,2$, $t > 0$, $x \in \mathrm{R}$, де Q_i, i = 1, 2, із (13), (14). Тоді

$$G_1(t,x,\alpha,h)=\pi^{-\frac{1}{2}}|x|^{-1}H_{3,2}^{1,2}\left(2(t-h)^{\alpha}|x|^{-1}\left|\begin{matrix}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(0,1),\left(0,\frac{1}{2}\right)\\(0,1),(0,\alpha)\end{matrix}\right.\right), \quad (15)$$

що відповідає формулі (4),

$$G_2(t,x,\alpha,h)=\pi^{-\frac{1}{2}}(t-h)^{\alpha-1}|x|^{-1}H_{3,2}^{1,2}\left(2(t-h)^{\alpha}|x|^{-1}\left|\begin{matrix}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(0,1),\left(0,\frac{1}{2}\right)\\(0,1),(1-\alpha,\alpha)\end{matrix}\right.\right), \quad (16)$$

а функція

$$u(t,x)=\int_{\mathrm{P}}G_1(t,x-\xi,\alpha,h)u_0(h,\xi)d\xi+$$

$$+\int_h^t d\tau\int_{\mathrm{R}}G_2(t-\tau,x-\xi,\alpha,h)f(\tau,\xi,h)d\xi, h\le t\le 2h, x\in\mathrm{R}, \quad (17)$$

де G1 і G2 визначені в (15) і (16) відповідно, є класичним розв’язком задачі Коші (6), (7). Наступним кроком є продовження розв’язку на інтервал kh ≤ t < (k + 1)h, $x\in\mathrm{R}$, k > 1. Для цього будуються функції u0, f, G1, G2 і u, де замість h треба записати kh, k > 1, і розв’язок задачі Коші (6), (7) запишеться у відповідному вигляді (17).

Класичний розв’язок задачі (1) – (3). Використовуючи (17), у смузі $\Pi=(kh,(k+1)h)\times\mathrm{R}$ побудуємо класичний розв'язок вихідної задачі (1) – (3) у вигляді

$$u(t,x)=\int_{\mathrm{P}}G_1(t,x-\xi,\alpha,kh)u_0(kh,\xi)d\xi+$$

$$+\int_{kh}^t d\tau\int_{\mathrm{P}}G_2(t-\tau,x-\xi,\alpha,kh)[f(\tau\xi,kh)-B(\tau)p(\tau,\xi)]d\xi, \quad (18)$$

де доданок $B(t)p(t,x)$ з невідомою функцією $p(t,x)$ віднесено до правої частини рівняння. Задовольнимо тепер умову (3) і із (18) отримаємо рівняння

$$\int_{kh}^{(k+1)h}d\tau\int_{\mathrm{P}}G_2((k+1)h-\tau,x-\xi,\alpha,kh)B(\tau)p(\tau,\xi)d\xi=$$

$$=[G_1(t,x;\alpha,kh)*u_0(kh,x)+G_2(t,x;\alpha,kh)*f(t,x,kh)]|_{t=(k+1)h}-$$

$$-\varphi(x)\equiv\Psi(x,\alpha,kh,(k+1)h), \quad (19)$$

яке є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду для визначення функції $p(t,x)$. Розв'язок рівняння (19) шукаємо у вигляді

$$p(t,x)=G_1(t,x,\alpha,kh)C, \quad (20)$$

де C – стала. Підставивши (20) у (19) для визначення C, отримаємо рівняння, яке має розв’язок

$$C=\Psi(x,\alpha;kh,(k+1)h)\left\{\int_{kh}^{(k+1)h}B(\tau)d\tau\int_{\mathrm{P}}G_2((k+1)h-\tau,x-\xi,\alpha,kh)\times\right.$$

$$\left.\times G_1(\tau,\xi,\alpha,kh)d\xi\right\}^{-1}.$$

Якщо врахувати формулу для згортки

$$G_2(t,x,\alpha,h)=\int_{\mathrm{P}}G_2(t-\beta,x-y;\alpha,h)G_1(\beta,y;\alpha,h)dy,$$

то отримаємо, що

$$C=\Psi(x,\alpha;kh,(k+1)h)\{G_2(t,x;\alpha,h)\int_{kh}^{(k+1)h}B(\tau)d\tau\}^{-1}, \qquad (21)$$

і

$$p(t,x)=G_1(t,x;\alpha,kh)\Psi(x,\alpha;kh,(k+1)h)\left\{G_2(t,x;\alpha,h)\int_{kh}^{(k+1)h}B(\tau)d\tau\right\}^{-1}.$$

Якщо підставити (21) у (18), то отримаємо формулу для $u(t,x)$.

Висновок. Отже, доведена така теорема.

Теорема. Пара функцій $u(t,x)$ із (18) і $p(t,x)$ із (21) визначають класичний розв’язок задачі (1) – (3).

Зауваження. В економічній задачі обсяг виготовленої продукції в даний момент часу залежить ще і від обсягу цієї продукції, випущеної і в деякий момент, що передує даному і в кінцевий момент часу. Формалізація моделі залежить від різних припущень – локальних заданих в початковий момент часу і нелокальних, що задається у різні моменти часу (останні раніше не досліджувалися). Моделі можуть бути використані у режимі комп’ютерної імітації для експериментальних досліджень реальних процесів економічної взаємодії. Такі дослідження дають можливість виявити закономірності та особливості економічної динаміки відтвореної створеними моделями.

Список використаних джерел:

1. Кочубей А. Н. Одновимірне рівняння фрактальної дифузії / А. Н. Кочубей, С. Д. Ейдельман // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11–16.
2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. (1993). Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, New York.
3. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. (2004). Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudodifferential Equations of Parabolic Type. Birkhäuser Verlag. Basel-Boston-Berlin, 390 p.
4. Oldham K.B., Spanier J. (1974). The fractional calculus, No. 4, Acad. Press London.
5. Oldham K.B., Spanier J. (1978). Fractional calculus and its application. Bul. Inst. Politeh. Iasi Sec. I, vol. 24, no. 3–4, pp. 29–34.
6. Тарасова В. В. Микроэкономический смысл производных нецелого порядка [Электронный ресурс] / Тарасова В. В., Тарасов В. Е. – Режим доступа: https://hublicacija.ru/mages/PDF/2017/19 microeconomicheskij-smysl.pdf
7. Елесгольц Л. Е. Вступ до теорії диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється / Л. Е. Ельсгольц, С. Б. Норкін. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
8. Дрінь І. І. Крайова задача по змінній *t* для рівняння фрактальної дифузії з аргументом, що відхиляється / І. І. Дрінь, С. С. Дрінь, Я. М. Дрінь // Наукові записки НаУКМА. – 2017. – Т. 201. Фізико-математичні науки. – С. 5–7.
9. Дрінь Я. М. Задача Коші для деяких класів параболічних псевдодиференціальних рівнянь : дис. канд. фіз.-мат. наук. / Я. М. Дрінь. – К., 1979. – 123 с.
10. Кочубей А. Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А. Н. Кочубей // Изв. АН ССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 909–934.

11. Дрінь Я. М. Задача Коші та нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами : дис. докт. фіз.-мат. наук. / Я. М. Дрінь. – К., 2015. – 339 с.
12. Jun-Shend Duan (2005). Time- and space-fractional partial differential equations. Journal of mathematical physics, 46, 013504.
13. Дрінь І. І. Зображення розв'язку нелокальних дифузійних рівнянь з відхиленим за часовою змінною аргументом [Електронний ресурс] / І. І. Дрінь, С. С. Дрінь, Я. М. Дрінь // The 13th International Conference on Correlation Optics "Correlation Optics'17". – Режим доступу: 106120E. doi:10.1117/12.2304312

Iryna Drin, PhD, Associate Professor,
Chernivtsi Institute of Trade and Economics of KNUTE,
Chernivtsi

THE REPRESENTATION OF SOLUTION FOR A PSEUDODIFFERENTIAL EQUATION WITH ARGUMENT DEVIATION

Summary

The investigation of the equations with fractional derivatives with a delay is an essential task, since the equations under studies are a prolific phenomenon for the research of numerous mathematical issues and interesting applications. The popularity of this sort of research has been stipulated by its wide-range application in modelling the processes of thermal conductivity, filtration, diffusion, plasma physics, image reconstruction, theory of biological populations, human reaction to AIDS, etc. When investigating the problems for the equations with fractional derivatives with a delay, the method of integral transformations, which uses the operators of fractional differentiation and integration, acquires the most significant role.

For a quasilinear pseudodifferential equation with fractional derivatives by time variable t with order $\alpha \in (0, 1]$, pseudodifferential operator with symbol $|\sigma|$ by space variable x and argument deviation with help of step method we prove the solvability of boundary problem with two unknown functions by variable t.

Keywords: evolutionary pseudodifferential equations, multipoint nonlocal in time problem, pseudodifferential equations of defection argument

References:

1. Kochubei, A.N., Eidelman, S.D. (2003). The equations of one-dimensional fractal diffusion. *Dop. NAN Ukrainy [Dop. NAN Ukraine],* no. 12, pp. 11–16 (in Ukr.).
2. Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. (1993*). Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications,* Gordon and Breach, New York.
3. Eidelman, S.D., Ivasyshen, S.D., Kochubei, A.N. (2004). *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudodifferential Equations of Parabolic Type,* Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin.
4. Oldham, K.B., Spanier, J. (1974). *The fractional calculus,* No. 4, Acad. Press, London.
5. Oldham, K.B., Spanier, J. (1978). Fractional calculus and its application. *Bul. Inst. Politeh. Iasi Sec. I*, vol. 24, no. 3–4, pp. 29–34.
6. Tarasova, V.V., Tarasov, V.E. (2017). *Microeconomic meaning of derivatives of non-integer order.* Available at: https://hublicacija.ru/mages/PDF/2017/19 microeconomicheskij-smysl.pdf (in Russ.).
7. Elsgolts, L.E., Norkin, S.B. (1971). *Vstup do teorii dyferentsial'nykh rivnian' z arhumentom, scho vidkhyliaiet'sia* [Introduction in the theory of differential equations with deviation in the argument], Nauka, Moskva (in Ukr.).
8. Drin, I., Drin, S., Drin, Y. (2017). The boundary problem by variable *t* for equation of fractal diffusion with argument deviation. *Nauk. zapysky NaUKMA [Scientific notes of NaUKMA],* vol. 201, pp. 5–7 (in Ukr.).
9. Drin, Ya.M. (1979). *The Cauchy problem for some parabolic pdeudodifferential equations,* PhD dissertation, phys.-math. science, Kyiv (in Ukr.).
10. Kochubei, A.N. (1988). Parabolic pseudodifferential equations, hypersingular integrals and Markov processes. *Izv. AN SSR. Ser. mat. [Math. USSR Izvestia],* no. 52, pp. 909–934 (in Russ.).
11. Drin, Ya.M. (2015). *The Cauchy problem and nonlocal problem for parabolic pdeudodifferential equations with nonsmooth symbols,* Thesis Doctor, phys.-math. science, Kyiv (in Ukr.).
12. Jun-Shend, Duan (2005). Time- and space-fractional partial differential equations. *Journal of mathematical physics*, no. 46, 013504.
13. Drin, I.I., Drin, S.S., Drin, Ya.M. (2017). Proc SPIE 10612. Representation of solution for fully nonlocal diffusion equations with deviation time variable. *The 13th International Conference on Correlation Optics "Correlation Optics'17"* (18 January 2018). Available at: 106120E; doi:10.1117/12.2304312 (in Ukr.).