

УДК 519.866:338.3

JEL Classification: H41, Q20, R10

DOI: <http://doi.org/10.34025/2310-8185-2025-1.97.12>

Василь Григорків, д.ф.-м.н., професор,
<https://orcid.org/0000-0003-4866-946X>

Марія Григорків, д.е.н., професор,
<https://orcid.org/0000-0003-3327-991X>

Олена Ярошенко, к.е.н., доцент,
<https://orcid.org/0000-0002-5976-6559>

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ ФУНКЦІЙ СУСПІЛЬНОЇ КОРИСНОСТІ

Анотація

Актуальність. Постановка проблеми. Екологічно небезпечні явища та процеси, що відбуваються у сучасному світі, значною мірою пов'язані з людською діяльністю, тобто з нераціональним природокористуванням, неконтрольованою та шкідливою для живої та неживої природи поведінкою споживачів і виробників, необґрунтованими економічними цілями, згубною для життєдіяльності людини екологічною політикою тощо. Все це свідчить про гостру необхідність й актуальність дослідження та глибокого наукового обґрунтування процесів еколого-економічної взаємодії у всіх сферах людського буття.

Мета дослідження. Розширення та вдосконалення інструментарію оцінювання ефективності еколого-економічних систем за допомогою еколого-економічних функцій суспільної корисності. Розробка моделі такої функції у класі кусково-лінійних функцій.

Методологія. У дослідженні використано методологію побудови функцій економічної та еколого-економічної поведінки як функцій з наперед заданими властивостями.

Результати. Розкрито поняття функції еколого-економічної корисності, що залежить від економічної та екологічної компонент стану соціально-економічної системи. Проаналізовано її властивості, що відображають загальні закономірності впливу еколого-економічних процесів на довкілля та якість людського життя. Формалізовано базові властивості для гладких функцій еколого-економічної корисності та їх кусково-лінійних аналогів. Обґрунтовано геометричну інтерпретацію кусково-лінійних функцій еколого-економічної корисності із двома змінними. Конкретизовано один із підходів до побудови неперервних кусково-лінійних функцій еколого-економічної корисності на основі її статистичних чи експертних значень. Встановлено необхідні й достатні умови угнутості (опуклості вгору) заданої на прямокутній області кусково-лінійної функції та умов її



монотонності по відповідних змінних. Запропоновано модель еколого-економічної функції суспільної корисності із вузловими (вершинними) значеннями, що є розв'язками оптимізаційних задач або задач умовної апроксимації. Модель такої функції дозволяє визначити еколого-економічну корисність у будь-якій точці допустимої множини її аргументів.

Практичне значення. Підхід до побудови кусково-лінійної функції суспільної корисності має достатньо широке застосування під час моделювання поведінкових функцій у економічних і еколого-економічних системах. Він легко реалізується на практиці та є зручним як для теоретичних, так і для практичних потреб. Адекватність моделі запропонованої функції корисності суттєво пов'язана з адекватністю її інформаційного забезпечення. **Перспективи подальших досліджень.** Предметом подальших досліджень у цьому напрямі є питання побудови гладких функцій еколого-економічної корисності та їх застосування у моделях економічних і еколого-економічних систем більш складної специфікації.

Ключові слова: модель, моделювання, підхід, функція, еколого-економічна корисність.

Кількість джерел: 21.

Vasyl Hryhorkiv, Doctor of Physical and Mathematical

Sciences, Professor,

<https://orcid.org/0000-0003-4866-946X>

Mariia Hryhorkiv, Doctor of Economic Science,

Professor,

<https://orcid.org/0000-0003-3327-991X>

Olena Yaroshenko, Candidate of Economic Sciences,

Associate Professor,

<https://orcid.org/0000-0002-5976-6559>

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi

MODELING OF PIECEWISE LINEAR ECOLOGICAL AND ECONOMIC PUBLIC UTILITY FUNCTIONS

Summary

Environmentally dangerous phenomena and processes occurring in the modern world are largely related to human activity, i.e., irrational use of nature, uncontrolled and harmful behavior of consumers and producers, unjustified economic goals, environmental policies harmful to human life, etc. All this indicates the urgent need and relevance of research and deep scientific substantiation of the processes of ecological and economic interaction in all spheres of human life.

Expanding and improving the toolkit for evaluating the effectiveness of ecological and economic systems using ecological and economic functions of social utility. Development of a model of such a function in the class of piecewise linear functions. The research used the methodology of constructing functions of economic and ecological-economic behavior as functions with predetermined properties. The concept of the function of ecological and economic utility, which depends on the economic and ecological components of the state of the socio-economic system, is revealed. Its properties are analyzed, reflecting the general regularities of the impact of ecological and economic processes on the environment and the quality of human life. Basic properties for smooth functions of ecological and economic utility and their piecewise linear analogues are formalized. The geometric interpretation of piecewise linear functions of ecological and economic utility with two variables is substantiated. One of the approaches to the construction of continuous piecewise linear functions of ecological and economic utility based on its statistical or expert values is specified. The necessary and sufficient conditions for the concavity (convexity upwards) of the piecewise linear function given on the rectangular region and the conditions for its monotonicity with respect to the relevant variables have been established. A model of the ecological and economic function of public utility with nodal (vertical) values, which are solutions for optimization problems or conditional approximation problems, is proposed. The model of such a function allows you to determine the ecological and economic utility at any point of the admissible set of its arguments.

The approach to constructing a piecewise linear function of public utility has a fairly wide application when modeling behavioral functions in economic and ecological-economic systems. It is easily implemented in practice and is convenient for both theoretical and practical needs. The adequacy of the model of the proposed utility function is significantly related to the adequacy of its information support. The subject of further research in this direction is the issue of constructing smooth functions of ecological and economic utility and their application in models of economic and ecological and economic systems of a more complex specification.

Keywords: model, modeling, approach, function, ecological and economic utility.

Number of sources – 21.

Постановка проблеми. До найбільш актуальних проблем сучасного світу, які впливають на безпечне існування та розвиток людського суспільства, сьогодні належать проблеми зміни клімату, забруднення ґрунтів, водойм, повітря тощо, причому у більшості випадків ці проблеми спровоковані саме людською діяльністю. Йдеться про нераціональне природокористування, неправильну або й абсолютно згубну для живої та неживої природи поведінку виробників і споживачів щодо функціонування економіки та її зростання, а також щодо реалізації стійкої екологічної політики та культури загалом. Звичайно, що екологічні кризи інколи є наслідком природних катаклізмів, але

причиною багатьох з них є все-таки екологічно незбалансована життєдіяльність людського суспільства та його економічна поведінка. Негативний антропогенний вплив на довкілля необхідно якнайшвидше зупинити, оскільки він руйнує не тільки безпеку та майбутнє людства, але й найближчі перспективи цивілізаційного простору.

Найбільш прогресивна й активна частина людства уже давно усвідомила необхідність екологізації економіки, технологій господарювання, управлінських рішень та зростання загальної екологічної культури суспільства, що, власне кажучи, і повинно привести до побудови економіки сталого або стійкого розвитку, проанонсованої ще у 1992 р. на конференції ООН у Ріо-де-Жанейро [4; 13; 15; 19]. Побудувати таку економіку, у тому числі і у нашій країні [4; 13-15], можна, лише здійснивши цілу низку важливих заходів, що неможливо без глибоких наукових обґрунтувань, розробки відповідних концептуальних і методологічних підходів щодо реалізації та підтримки процесів екологізації і сталого розвитку. У цьому контексті надзвичайно актуальною є розробка моделей та алгоритмів, здатних відтворювати зазначені вище явища й процеси і продукувати науково підтверджені сценарії та рішення, придатні і корисні для економічної практики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Наявний на сьогодні науковий доробок із проблем екологізації економіки, сталого розвитку та моделювання процесів еколого-економічної взаємодії є достатньо значним і вагомим у сенсі вихідної методологічної та методичної платформи для проведення подальших теоретичних і прикладних досліджень із цієї проблематики. Починаючи із огляду уже класичних результатів яскравої плеяди науковців Римського клубу, зокрема М. Месаровича і Е. Пестеля [2], Дж. Форрестера [1], В. Леонтьєва та Д. Форда [17] і ін., та завершуючи оглядом численних сучасних наукових здобутків у цьому напрямку, можна констатувати, що їх навіть короткий аналіз неможливо здійснити у пропонованому авторами дослідженні. Але слід особливо підкреслити, що для вітчизняної науки надзвичайно важливе значення мають праці

наших дослідників І. Ляшенка [17], А. Онищенко [18], Л. Буяк [3], Ю. Тадеєва [20], Ю. Королюка, В. Толуб'яка [16] та багатьох інших. Саме у працях цих авторів і їхніх колег з відповідних наукових шкіл розроблено потужний інструментарій для моделювання еколого-економічних систем і систем сталого розвитку, у тому числі інструментарій статичних і динамічних моделей екологічного виробництва, функціональних і структурних моделей еколого-економічної поведінки виробників і споживачів, моделей підготовки й прийняття оптимальних управлінських рішень у процесах еколого-економічної взаємодії. Ці й інші результати досліджень вітчизняних науковців мають також важливе значення для практичного застосування як відповідні технології прикладного забезпечення.

Пропоноване авторами дослідження ідейно розвиває їхні попередні результати [5-12] й концептуально продовжує традиції багатьох авторів вітчизняної наукової школи з моделювання еколого-економічних систем [4; 17; 18; 20; 21].

Формулювання цілей статті. Вище уже було визначено коло дослідницьких інтересів авторів цієї праці, яке охоплює тематику моделювання процесів екологізації економіки, збалансування еколого-економічної взаємодії на різних рівнях агрегування економічних систем, оцінювання ефективності екологічної економіки для суспільства. Створений наукою та практикою застосування її результатів арсенал методів і моделей для дослідження реальних еколого-економічних процесів сьогодні є достатньо потужним і дієвим для формування прогресивної екологічної політики у всіх сферах діяльності людини. Однак у контексті підготовки прийняття як корпоративних, так і індивідуальних рішень щодо корисності (цінності) для суспільства й окремої людини еколого-економічної рівноваги і, зокрема, оптимальних співвідношень між економічними й екологічними факторами впливу на довкілля та якість життя, чимало питань ще залишаються не повністю вивченими й зрозумілими. До таких питань належить і питання про розробку адекватної системи оцінок еколого-економічної ефективності. І в цьому сенсі актуальною є побудова моделей функцій еколого-економічної корисності, які

дозволяють кількісно оцінити цю корисність. Ці функції, з одного боку, є самостійними моделями, а з іншого боку – структурними елементами моделей із більш складною специфікацією. Розробці моделей цих функцій присвячена ця праця.

Виклад основного матеріалу. Приступимо до викладення основних результатів. Під еколого-економічною функцією суспільної корисності будемо розуміти функцію

$$u = u(x, y), \quad (1)$$

де x та y – відповідно економічна й екологічна компоненти стану соціально-економічної системи. До прикладу, такими компонентами можуть бути деякі агреговані показники рівня розвитку економіки (національний дохід, невиробниче споживання тощо) та рівня забруднення довкілля у досліджуваних країні чи регіоні. Побудова функції (1) є актуальною проблемою моделювання процесів еколого-економічної взаємодії. На окремих аспектах цієї проблеми зупинимося нижче.

Найперше з'ясуємо основні властивості цієї функції, вважаючи, що x та y мають зазначений вище зміст. Очевидно, що зростання показника x і спадання показника y є бажаними для суспільства, хоча межі такого зростання і спадання повинні бути чітко обґрунтованими, що впливає з аналізу реальних ситуацій. Інакше кажучи, зростання економічної компоненти x приводить до спадання граничної корисності (швидкість зростання корисності спадає). Аналогічна ситуація і з компонентою y , тобто гранична корисність також спадає із її зростанням, оскільки «перенасичення» забрудненням позбавляє сенсу життєдіяльності суспільства на відповідній території. Якщо вважати функцію (1) двічі неперервно диференційовною, то перелічені властивості означають, що

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} < 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} < 0. \quad (3)$$

Залежно від особливостей процесів еколого-економічної взаємодії властивості (2), (3) можуть бути доповнені також іншими, більш специфічними, властивостями [7], але на них зупинятися не будемо. Зауважимо лише, що умови (3) інколи можна замінити більш сильною умовою – від’ємною визначеністю матриці Гессе (матриці других похідних). Тоді графічною ілюстрацією функції (1), що задовольняє умови (2), (3), у тривимірному точковому просторі $\square$ буде опукла вгору (угнута) поверхня із зростаючими по x та спадаючими по y лініями відповідних перерізів.

Одним із підходів до побудови таких функцій еколого-економічної корисності є побудова неперервних кусково-лінійних аналогів гладкої функції (1), тобто кусково-лінійних апроксимацій гіпотетичної функції на основі її статистично чи експертно встановлених значень $\hat{u}_{ji}$ ($j = \overline{0, m}; i = \overline{0, n}$) на деякій сітці

$$\Delta = \Delta x \times \Delta y = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \times \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\},$$

де $P = [a, b] \times [c, d]$ – задана прямокутна підмножина із множини визначення функції (1). У сенсі геометричної інтерпретації функція, яку ми хочемо побудувати, є угнутою кусково-лінійною поверхнею із монотонно зростаючими x -перерізами і монотонно спадними y -перерізами та вершинами (вузловими точками) (x_i, y_j, u_{ji}) ($j = \overline{0, m}; i = \overline{0, n}$). Підкреслимо, що x -переріз поверхні $u(x, y)$ – це її переріз площиною $y = \text{const}$, а y -переріз – це її переріз площиною $x = \text{const}$.

Введемо позначення

$$\nu_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = \overline{0, n-1}), \quad \mu_j = y_{j+1} - y_j \quad (j = \overline{0, m-1}),$$

$$A_{ji} = \frac{u_{j,i+1} - u_{ji}}{\nu_i}, \quad B_{ji} = \frac{u_{j+1,i} - u_{ji}}{\mu_j}, \quad P_{ji} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}].$$

Тоді під кусково-лінійною поверхнею $u^*(x, y)$, що складається із чотирикутників, будемо називати таку поверхню, яка у кожному прямокутнику P_{ji} є частиною площини

$$L_{ji}(x, y) = u_{ji} + A_{ji}(x - x_i) + B_{ji}(y - y_j) \quad (4)$$

і неперервна у прямокутнику P , тобто є такою, що

$$\begin{cases} A_{ji} = A_{ri}; & j, r = \overline{0, m}; & i = \overline{0, n-1}; \\ B_{ji} = B_{jk}, & j = \overline{0, m-1}; & i, k = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (5)$$

Надалі зазначені чотирикутні лінійні ланки поверхні $u^*(x, y)$ будемо позначати через $u_{ji}^*(x, y)$.

Легко перевірити, що співвідношення (4) є рівнянням площини, що проходить через точки (x_i, y_j, u_{ji}) , $(x_{i+1}, y_j, u_{j,i+1})$, $(x_i, y_{j+1}, u_{j+1,i})$, а умови (5) впливають з того, що точка $(x_{i+1}, y_{j+1}, u_{j+1,i+1})$ має належати площині (4), а значить і $u_{ji}^*(x, y)$. Мають місце наступні твердження.

Твердження 1. Для кусково-лінійної поверхні $u^*(x, y)$ довільні x - та y -перерізи будуть відповідно монотонно зростаючими та монотонно спадними, якщо мають місце співвідношення

$$A_{ji} > 0, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad j = \overline{0, m}, \quad (6)$$

$$B_{ji} < 0, \quad j = \overline{0, m-1}; \quad i = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Твердження 2. Для того, щоб побудована кусково-лінійна поверхня $u^*(x, y)$ була угнутою на прямокутнику P , необхідно й достатньо виконання умов:

$$A_{ji} \geq A_{j,i+1}, \quad i = \overline{0, n-2}; \quad j = \overline{0, m}, \quad (8)$$

$$B_{ji} \geq B_{j+1,i}, \quad j = \overline{0, m-2}; \quad i = \overline{0, n}. \quad (9)$$

Твердження 3. Кусково-лінійна поверхня $u^*(x, y)$ буде строго угнутою та мати монотонно зростаючі x -перерізи і монотонно спадні y -перерізи на прямокутнику P , якщо разом з умовами (5) виконуються умови:

$$A_{j,i+1} - A_{ji} < 0, A_{j,n-1} > 0, i = \overline{0, n-2}; j = \overline{0, m}, \quad (10)$$

$$B_{j+1,i} - B_{ji} < 0, B_{oi} < 0, i = \overline{0, n}; j = \overline{0, m-1}. \quad (11)$$

Зауважимо, що довести ці твердження нескладно, тому зупинятися на цьому не будемо. До того ж твердження (3) є наслідком перших двох тверджень. Крім того, із цих тверджень випливає, що допустима множина вершин (x_i, y_j, u_{ji}^*) ($j = \overline{0, m}; i = \overline{0, n}$) кусково-лінійної поверхні $u^*(x, y)$, визначеної на прямокутнику P , формується із тих вершин, для яких виконуються співвідношення (5), (10), (11). Позначимо через Ω^* множину значень u_{ji}^* у цих вершинах. Множина $\Omega^* \neq \emptyset$, що легко перевірити на конкретних прикладах.

Тепер, зважаючи на те, що задані значення $\hat{u}_{ji}$ у реальній ситуації зазвичай не задовольняють умови (5), (10), (11), задача побудови поверхні $u^*(x, y)$ зводиться до деякої задачі умовної апроксимації. Якщо $\hat{u}_{ji}$ задані у всіх точках сітки Δ , то побудову поверхні $u^*(x, y)$ можна звести до задачі

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \gamma_{ij} (u_{ji}^* - \hat{u}_{ji}) \rightarrow \min, \\ u_{ji}^* \in \Omega^* \quad (j = \overline{0, m}; i = \overline{0, n}), \end{cases} \quad (12)$$

де γ_{ij} – задані вагові коефіцієнти відповідних вершин або спостережуваних значень $\hat{u}_{ji}$.

Однак у реальних ситуаціях наявність даних $\hat{u}_{ji}$ для усіх точок сітки є проблематичною. У більшості випадків таких даних немає, але є значення $\hat{u}_{jj}$ ($j=\overline{1,k}$), тобто «діагональні» значення у вершинах квадратної сітки Δ ($j,i=\overline{1,k}$). Тоді побудова поверхні $u^*(x,y)$ зводиться до задачі

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^k \gamma_{jj} (u_{jj}^* - \hat{u}_{jj})^2 \rightarrow \min, \\ u_{ji}^* \in \Omega^*; \quad j,i=\overline{1,k}, \end{cases} \quad (13)$$

де γ_{jj} – як і раніше, вагові коефіцієнти «діагональних» значень $\hat{u}_{jj}$.

Щодо оптимізаційних задач (12), (13) слід зауважити, що вони мають розв'язок, оскільки цільові функції обмежені знизу, а допустимі множини належать компакт P . Розв'язавши відповідну задачу ((12) чи (13)), ми практично побудуємо кусково-лінійну поверхню $u^*(x,y)$, тобто кусково-лінійну функцію еколого-економічної корисності, яка дає можливість оцінити цю корисність у будь-якій точці множини P .

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. По-перше, використаний підхід до моделювання кусково-лінійних еколого-економічних функцій суспільної корисності є одним із ефективних підходів до розв'язування специфічних задач умовної апроксимації, які часто зустрічаються в економіко-математичних дослідженнях. По-друге, цей підхід можна легко модифікувати на випадок побудови гладких функцій еколого-економічної корисності й інших функцій економічної чи еколого-економічної поведінки, використовуючи інструментарій так званих сплайнів. По-третє, запропонована модель еколого-економічної функції суспільної корисності є достатньо зручною для практичного застосування, хоча її адекватність, як і адекватність інших

моделей економічних і еколого-економічних систем, суттєво залежить від об'єктивного й глибоко обґрунтованого інформаційного забезпечення.

У комплексі з іншими підходами до оцінювання корисності еколого-економічної взаємодії та сучасними комп'ютерно-інформаційними технологіями описана у цьому дослідженні модель еколого-економічної функції суспільної корисності розширює методологічний та прикладний інструментарій для формування системи оцінок щодо визначення ефективності еколого-економічних процесів, а також підготовки і прийняття оптимальних управлінських рішень в еколого-економічних системах. Перспективи досліджень у цьому напрямку очевидні та окреслені попередніми висновками.

Список використаних джерел:

1. Forrester, Jay W. (1971). *World Dynamics*, Wright-Allen Press, 142 p. URL: https://monoskop.org/images/d/dc/Forrester_Jay_W_World_Dynamics_2nd_ed_1973.pdf
2. Mihajlo D. Mesarović, Eduard Pestel (1976). *Mankind at the Turning Point: The second report of the club of Rome*. E.P.Dutton, 210 p.
3. Буяк Л. М. Математичні моделі загальної економічної динаміки з урахуванням соціально-економічної кластеризації : монографія. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. 392 с. URL: <https://emm.cv.ua/mat-models-economic-dynamics/>
4. Герасимчук З. В. Регіональна політика сталого розвитку : методологія формування, механізми реалізації : монографія. Луцьк : Надстир'я, 2001. 495 с.
5. Григорків В. С., Буяк Л. М. Про структурний підхід в економіко-математичному моделюванні виробничих та еколого-економічних функцій оптимальних випусків і затрат. *Науковий вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту*. Київ, 2002. Вип. 2, ч. 2. С. 178-183.
6. Григорків В. С., Григорків М. В. Моделі еколого-економічних функцій як інструментарій підтримки прийняття рішень у ринковій економіці. *Вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту*. Чернівці : ЧТЕІ КНТЕУ, 2021. Вип. I(81). Економічні науки. С. 102-114. URL: <http://herald.chite.edu.ua/content/download/archive/2021/v1/7.pdf>
7. Григорків В. С. Моделювання економіки : підручник. Чернівці : Чернівецьк. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. 360 с. URL: <https://emm.cv.ua/modeliuvannia-ekonomiky-pidruch-2019/>
8. Григорків В. С. Умовна апроксимація економічних даних у задачах моделювання. *Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці : матеріали VIII Міжнародної науково-методичної конференції* (Чернівці, 20-21 квітня 2023 р.). Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2023. С. 86-87. URL: <https://emm.cv.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-metodichna-konferentsiya-matematichni-metodi-modeli-ta-informatsijni-tehnologiyi-v-ekonomitsi/>
9. Григорків М. В. Динамічні односекторні моделі еколого-економічної системи з лінійними функціями економічної поведінки. *Вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту*. Чернівці : ЧТЕІ КНТЕУ, 2015. Вип. I (57). Економічні науки. С. 172-180. URL: http://herald.chite.edu.ua/content/download/archive/2015/v1/NV-2015-v1_23.pdf

10. Григорків М. В. Двосекторні моделі еколого-економічної динаміки з лінійними функціями економічної поведінки. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Економіка»*. Ужгород, 2015. Випуск 1 (45). Том 1. С. 259-262.
11. Григорків М. В. Динамічні моделі еколого-економічних систем в умовах соціально-економічної кластеризації : монографія. Тернопіль: Економічна думка ТНЕУ, 2020. С. 415. URL: <https://emm.cv.ua/dunamichni-modeli-ecologo-economichnux-sistem-v-umovah-cosialno-economichnoi-klasteruzatcii-2020/>
12. Григорків М. В. Моделі динамічних функцій забруднення: концепція побудови. *Збірник наукових праць. Економічні науки*. Чернівці : Книги XXI, 2020. Вип. 16. С. 56-66.
13. Гринів Л.С. Екологічно збалансована економіка: проблеми теорії : Монографія. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2001. 240 с.
14. Дробноход М. Україна в контексті апокаліптичного розвитку людства. *Наукові записки АН ВШ України*. Київ, 2010. Том V. С. 5-36.
15. Концепція сталого розвитку України / Волошин В. В., Гордієнко Н. М., Горленко І. О., Данилишин Б. М., Дорогунцов С. І. Київ, 1997. 17 с.
16. Королюк Ю. Г., Толуб'як В. С. Прогнозні домінанти регіонального розвитку (на прикладі Чернівецької області). *Ефективна економіка*. 2019. № 6. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/efek_2019_6_9
17. Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. Київ : Вища школа, 1999. 236 с.
18. Онищенко А. М. Моделювання еколого-економічної взаємодії в процесі виконання рішень Кіотського протоколу : монографія. Полтава : Полтавський літератор, 2011. 398 с.
19. Програма дій «Порядок денний на 21 століття» / Пер. з англ. : ВГО «Україна. Порядок денний на 21 століття». Кишинів : Інтелсфера, 2000. 360 с.
20. Тадеев Ю. П. Розширення моделі Леонтьєва в умовах екологічної збалансованості. *Бізнес-Інформ*. 2012. № 4. С. 132-136. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/binf_2012_4_42
21. Хрущ Л. З. Еколого-економічні виробничі функції (побудова та застосування у прогнозуванні). *Моделювання та інформаційні системи в економіці* : зб. наук. пр. Київ : КНЕУ, 2007. Вип. 76. С. 155-165.

References:

1. Forrester, Jay W. (1971). *World Dynamics*, Wright-Allen Press, 142 p. Available at: https://monoskop.org/images/d/dc/Forrester_Jay_W_World_Dynamics_2nd_ed_1973.pdf
2. Mihajlo, D. Mesarović, Eduard, Pestel (1976). *Mankind at the Turning Point: The second report of the club of Rome*. E.P.Dutton. 210 p.
3. Buiak, L.M. (2016). *Matematychni modeli zahalnoi ekonomichnoi dynamiky z urakhuvanniam sotsialno-ekonomichnoi klasteryzatsii* [Mathematical models of general economic dynamics taking into account socio-economic clustering]. Chernivetskyi nats. un-t, Chernivtsi, Ukraine, 392 p. Available at: <https://emm.cv.ua/mat-models-economic-dynamics/> (in Ukr.).
4. Herasymchuk, Z.V. (2001). *Rehional'na polityka staloho rozvytku : metodolohiia formuvannia, mekhanizmy realizatsii* [Regional policy of sustainable development: methodology formation, mechanisms of the implementation]. Luts'k, Nadstyr'ia, 495 p. (in Ukr.).
5. Hryhorkiv, V.S., Buiak, L.M. (2002). On the structural approach in economic-mathematical modeling of production and ecological-economic functions of optimal outputs and costs. *Pro strukturnyj pidkhid v ekonomiko-matematychnomu modeliuванні vyrobnychkyh ta ekoloho-ekonomichnykh funktsii optymal'nykh vypuskiv i zatrat* [Scientific Bulletin of the Chernivtsi Trade and Economic Institute], vol. 2, ch. 2, pp. 178-183 (in Ukr.).

6. Hryhorkiv, V.S., Hryhorkiv, M.V. (2021). Models of ecological and economic functions as tools of decision supporting in the market economy. *Visnyk Chernivets'koho torhovel'no-ekonomichnoho instytutu [Bulletin of the Chernivtsi Institute of Trade and Economics]*, vol. I(81), pp. 102-114. Available at: <http://herald.chite.edu.ua/content/download/archive/2021/v1/7.pdf> (in Ukr.).
7. Hryhorkiv, V.S. (2019). *Modeliuvannia ekonomiky [Modeling the economy]*. ChNU, Chernivtsi, 360 p. Available at: <https://emm.cv.ua/modeliuvannia-ekonomiky-pidruch-2019/> (in Ukr.).
8. Hryhorkiv, V.S. (2023). Conditional approximation of economic data in modeling problems. *Matematychni metody, modeli ta informatsijni tekhnologii v ekonomitsi. Materialy VIII Mizhnarodnoi nauково-metodychnoi konferentsii [Mathematical methods, models and information technologies in the economy. Mat. of the VIII International scientific and methodological conference]* (Chernivtsi, April 20-21, 2023). Chernivets. nats. un-t im. Yu. Fed'kovycha, Chernivtsi, pp. 86-87. Available at: <https://emm.cv.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-metodichna-konferentsiya-matematichni-metodi-modeli-ta-informatsijni-tehnologiyi-v-ekonomitsi/> (in Ukr.).
9. Hryhorkiv, M.V. (2015). Dynamic single-sector models of eco-economic systems with linear functions of economic behavior. *Visnyk Chernivets'koho torhovel'no-ekonomichnoho instytutu [Bulletin of the Chernivtsi Institute of Trade and Economics]*, vol. I (57), pp. 172-180. Available at: http://herald.chite.edu.ua/content/download/archive/2015/v1/NV-2015-v1_23.pdf (in Ukr.).
10. Hryhorkiv, M.V. (2015). The two-sector models of eco-economic dynamics with a linear functions of economic behavior. *Naukovyj visnyk Uzhhorods'koho universytetu. Seriya «Ekonomika» [Scientific Bulletin of Uzhhorod University. "Economy" series]*, issue 1 (45), vol. 1, pp. 259-262 (in Ukr.).
11. Hryhorkiv, M.V. (2020). *Dynamichni modeli ekologo-ekonomichnyx system v umovax socialno-ekonomichnoyi klasteryzaciyi [Dynamic models of eco-economic systems in the conditions of socio-economic clustering]*. Ekonomichna dumka TNEU, Ternopil, 415 p. Available at: <https://emm.cv.ua/dunamichni-modeli-ekologo-ekonomichnux-sustem-v-ymovax-cosialno-ekonomichnoi-klasteruzatcii-2020/> (in Ukr.).
12. Hryhorkiv, M.V. (2020). Models of dynamic pollution functions: construction concept. *Zbirnyk naukovykh prats'. Ekonomichni nauky [Collection of scientific papers. Economic sciences]*. Knyhy XXI, Chernivtsi, vol. 16, pp. 56-66 (in Ukr.).
13. Hryniv, L.S. (2001). *Ekolohichno zbalansovana ekonomika: problemy teorii [Economically balanced economy: problems of the theory]*. LNU im. I. Franka, L'viv, 240 p. (in Ukr.).
14. Drobnokhod, M. (2010). Ukraine in the context of the apocalyptic development of humanity. *Naukovi zapysky AN VSh Ukrainy [Scientific notes of the Academy of Sciences of the Higher School of Ukraine]*, vol. V, pp. 5-36 (in Ukr.).
15. Voloshyn, V.V., Hordienko, N.M., Horlenko, I.O., Danylyshyn, B.M., Dorohuntsov, S.I. (1997). *Kontseptsiiia staloho rozvytku Ukrainy [The concept of sustainable development of Ukraine]*. 17 p. (in Ukr.).
16. Koroliuk, Yu.H., Tolub'iak, V.S. (2019). Predicted dominants of regional development (using the example of Chernivtsi region). *Efektivna ekonomika [Efficient economy]*, № 6. Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/efek_2019_6_9 (in Ukr.).
17. Lyashenko I.M. (1999). *Ekonomiko-matematychni metody ta modeli stalogo rozvytku [Economic and mathematical methods and models of sustainable development]*. Vyshha shkola, Kyiv, 236 p. (in Ukr.).

18. Onyschenko, A.M. (2011). *Modeliuvannia ekoloho-ekonomichnoi vzaiemodii v protsesi vykonannia rishen' Kiots'koho protokolu* [Modelling of ecologic-economic interaction in the process of implementation decisions of Kiotskogo protocol]. Poltavskiy literator, Poltava, 398 p. (in Ukr.).
19. Action Program "Agenda for the 21st Century". Intelsfera, Chisinau, 360 p. (in Ukr.).
20. Tadeiev, Yu.P. (2012). Extension of Leontiev's model in conditions of ecological balance. *Biznes Inform [Business Inform]*, № 4, pp. 132-136. Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/binf_2012_4_42 (in Ukr.).
21. Khrusch, L.Z. (2007). Ecological and economic production functions (construction and application in forecasting). *Modeliuvannia ta informatsiini systemy v ekonomitsi [Modeling and information systems in economics]*, vol. 76, pp. 155-165 (in Ukr.).

Надійшла до редакції 06.03.2025

Прийнято до друку 18.03.2025

Публікація онлайн 31.03.2025