УДК 517.91:532.2

Готинчан Ірина Зіновіївна
ЧТЕІ КНТЕУ
(Чернівці, Україна)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ АЛГОРИТМІЧНОГО ХАРАКТЕРУ ЗАДАЧІ КВАЗІСТАТИКИ В БАГАТОШАРОВИХ НАПІВОБМЕЖЕНИХ ТІЛАХ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАНКЕЛЯ 1-ГО РОДУ – (КОНТОРОВИЧА - ЛЄБЄДЄВА) 2-ГО РОДУ - ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ- ФУР'Є

Анотація. *Методами гібридного інтегрального перетворення типу Ганкеля 1-го роду – (Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду – Лежандра 2-го роду – Фур'є на полярній осі та фундаментальних функцій побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру задачі квазістатики для кусково-однорідного чотирискладового середовища.*

Ключові слова*: гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, дельта – подібна послідовність, спектральна вектор-функція, спектральна щільність.*

Hotynchan Iryna Zinoviivna
CHTEI KNTEU
(Chernivtsi, Ukraine)

CONSTRUCTION OF THE SOLUTION OF THE ALGORITHMIC CHARACTER THE QUASI STATICS PROBLEM IN THE MULTILAYER SEMI-BOUNDED BODIES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORMATION OF THE TYPE HANKEL OF 1-ND KIND - (CONTOROVICH - LEBEDEVA) OF 2-ND KIND - LEGENDRE OF 2-ND KIND - FOURIER

Abstract. *The methods of the hybrid integral transformation of the type Hankel of 1-nd kind - (Contorovich - Lebedeva) of 2-nd kind - Legendre of 2-nd kind - Fourier and the fundamental functions for constructed an exact analytic solution of the algorithmic naturel of the quasi statics problem for a piecewise homogeneous four-component medium*

Keywords: *hybrid differential operator, hybrid integral transformation, delta - like sequence, spectral vector function, spectral density.*

Готинчан Ирина Зиновьевна
ЧТЭИ КНТЭУ
(Черновцы, Украина)

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА ЗАДАЧ КВАЗИСТАТИКИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ 1-ГО РОДА - (КОНТОРОВИЧА - ЛЕБЕДЕВА) 2-ГО РОДА - ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДА - ФУРЬЕ

Аннотация. *Методами гибридного интегрального преобразования типа Ганкеля 1-го рода - (Конторовича - Лебедева) 2-го рода - Лежандра 2-го рода - Фурье на полярной*

оси и фундаментальных функций построено точное аналитическое решение алгоритмического характера задачи квазистатики для кусочно-однородной четырехслойной среды.

Ключевые слова: *гибридный дифференциальный оператор, гибридное интегральное преобразование, дельта - подобная последовательность, спектральная вектор-функция, спектральная плотность.*

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_3 = \{(t,r): t \in (0,+\infty), r \in I_2 = (0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,R_3) \cup (R_3,+\infty)\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу

$$\frac{\partial u_1(t,r)}{\partial t} + \chi_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1(t,r)] = f_1(t,r), \quad r \in (0,R_1),$$
$$\frac{\partial u_2(t,r)}{\partial t} + \chi_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 B_{\alpha_2}[u_2(t,r)] = f_2(t,r), \quad r \in (R_1,R_2),$$
$$\frac{\partial u_3(t,r)}{\partial t} + \chi_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[u_3(t,r)] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2,R_3), \tag{1}$$
$$\frac{\partial u_4(t,r)}{\partial t} + \chi_4^2 u_4(t,r) - a_4^2 \frac{\partial^2 u_4(t,r)}{\partial r^2} = f_4(t,r), \quad r \in (R_3,+\infty),$$

за початковими умовами

$$u_i(t,r)\big|_{t=0} = g_i(r), \quad r \in (R_{i-1},R_i), \quad i = \overline{1,4}, \quad R_0 = 0, \quad R_4 = +\infty, \tag{2}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{j1}^k, \; j = 1,2; \; k = \overline{1,3}, \tag{3}$$

та умовами обмеження

$$\lim_{r\to 0} r^\alpha u_1(t,r) = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{\partial^m u_4(t,r)}{\partial r^m} = 0, \quad m = 0,1, \tag{4}$$

де $a_i > 0, \; \chi_1^2 \ge 0, \; \alpha_{jm}^k \ge 0, \; \beta_{jm}^k \ge 0, \; i = \overline{1,4}, \; j,m = 1,2, \; k = \overline{1,3};$

$B_{\nu,\alpha_1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_1 + 1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2 - \alpha_1}{r^2},$ – диференціальний оператор Бесселя [5] з виродженням в групі молодших, $B_{\alpha_2} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_2 + 1) r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_2 - \lambda^2 r^2, \;\; \alpha_2 > -\frac{1}{2},$ $\lambda \in (0,+\infty),$ диференціаль-ний оператор Бесселя [5] з виродженням в групі старших, $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ –диференціальний оператор Фур'є, $\Lambda_{(\mu)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{1-chr} + \frac{\mu_2}{1+chr}\right),$

$\mu_1 \geq \mu_2 > -\frac{1}{2}$, – узагальнений диференціальний оператор Лежандра [6].

Ефективним методом побудови розв'язку задачі (1) – (4) може служити спеціально запроваджене за методою [1] гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду - (Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду - Лежандра 2-го роду - Фур'є.

1. <u>Побудова скінченого гібридного інтегрального перетворення типу Ганкеля 1-го роду -(Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду - Лежандра 2-го роду - Фур'є.</u>

Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині $I_3^+ = \{r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3) \cup (R_3, +\infty)\}$ гібридним диференціальним оператором

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)} &= a_1^2 \theta(r)\theta(R_1 - r)B_{\nu,\alpha_1} + a_2^2 \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)B_{\alpha_2} + a_3^2 \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\Lambda_{(\mu)} + \\ &+ a_4^2 \theta(r - R_3)\frac{d^2}{dr^2}, \quad (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (\mu) = (\mu_1, \mu_2). \end{aligned} \tag{5}$$

<u>Означення 1.</u> Областю визначення оператора $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r); g_4(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\alpha_2}[g_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]; g_4''(r)\}$ неперервна на множині I_3^+; 2) справджуються крайові умови

$$\lim_{r \to 0} r^{\alpha} g_1(r) = 0, \quad \lim_{r \to +\infty} \frac{d^m g_4(r)}{dr^m} = 0, \quad m = 0{,}1, \tag{6}$$

3) справджуються умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0, \; j = 1{,}2; \; k = \overline{1{,}3}, \tag{7}$$

Нехай виконані умови на коефіцієнти $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0, \; c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $j = 1{,}2, \;\; k = \overline{1{,}3}.$

<u>Лема</u>. Якщо $u(r) \in G, \; v(r) \in G$ то справджується базова тотожність

$$\left[v_k(r)u_k'(r) - u_k(r)v_k'(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[\left(v_{k+1}(r)u_{k+1}'(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\right)\right]\Big|_{r=R_k}, \; k = 1{,}2{,}3. \tag{8}$$

Доведення. Використовуючи ідею доведення [8] у випадку з однією точкою спряження і умови (7), одержуємо (8).

Визначимо вагову функцію

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \sigma_1 \theta(r)\theta(R_1 - r) r^{2\alpha_1 + 1} + \sigma_2 \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) r^{2\alpha_2 - 1} + \\ &+ \sigma_3 \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r) sh r + \sigma_4 \theta(r - R_3), \end{aligned} \tag{9}$$

Выпуск 1(69) ч. 2 ISSN 2524-0986

де $\sigma_1 = \frac{1}{a_1^2}\frac{c_{11}c_{12}c_{13}}{c_{21}c_{22}c_{23}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{shR_2}{shR_3}$, $\sigma_2 = \frac{1}{a_2^2}\frac{c_{12}c_{13}}{c_{22}c_{23}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{shR_2}{shR_3}$,

$\sigma_3 = \frac{1}{a_3^2}\frac{c_{13}}{c_{23}}\frac{1}{shR_3}$, $\sigma_4 = \frac{1}{a_4^2}$ і скалярний добуток

$$(u,v) = \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 shrdr + $$
$$+ \int_{R_3}^{+\infty} u_4(r)v_4(r)\sigma_4 dr. \tag{10}$$

знаходимо, що в силу базової тотожності (8)

$$\left(\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u],v\right) = \left(u,\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[v]\right). \tag{11}$$

Рівність (11) показує, що оператор $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений. А, значить, його спектр дійсний [8].

При $b_j = a_j^{-1}\left(\beta^2 + \gamma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, де $|\beta| \in (0,+\infty)$, $\gamma_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,4}$, фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2\right)u(r) = 0$ утворюють циліндричні функції $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r) = (b_1 r)^{-\alpha_1} J_\nu(b_1 r)$ і $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r) = (b_1 r)^{-\alpha_1} N_\nu(b_1 r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\alpha_2} + b_2^2\right)u(r) = 0$ утворюють функції $C_{\alpha_2}(\lambda r, b_2)$ і $D_{\alpha_2}(\lambda r, b_2)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для модифікованого узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2\right)u(r) = 0$ утворюють функції $A_{-\frac{1}{2}+ib_3}^{(\mu)}(chr)$, $B_{-\frac{1}{2}+ib_3}^{(\mu)}(chr)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)u(r) = 0$ утворюють функції $\cos b_4 r$ та $\sin b_4 r$.

При $r \to +\infty$ тригонометричні функції $\cos b_4 r$ і $\sin b_4 r$ ведуть себе "однаково": не мають границі; при $r \to +0$ циліндрична функція першого роду $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ обмежена, а циліндрична функція $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ не обмежена [1]. Отже, точка $r = +\infty$ є особливою точкою гібридного диференціального оператора $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$. У цьому випадку спектр оператора $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ неперервний, а спектральна вектор-функція $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)=\left\{V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta);V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta);V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta);V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\right\}$, яка йому відповідає, дійсна.

Компоненти $V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)$ спектральної вектор-функції є обмеженим на множині I_3^+ розв'язком сепаратної системи рівнянь

$$\begin{aligned}&\left(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2\right)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(0,R_1),\\&\left(B_{\alpha_2}+b_2^2\right)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2),\\&\left(\Lambda_{(\mu)}+b_3^2\right)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_2,R_3),\\&\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_4^2\right)V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_3,+\infty),\end{aligned}\tag{12}$$

за крайовими умовами (6) та умовами спряження (7).

Безпосередньо перевіряється, що компоненти спектральної вектор-функції $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}&V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)=b_4c_{23}q_{\alpha_2,1}(\beta)q_{\alpha_2,2}(\beta)J_{\nu,\alpha_1}(b_1r),\\&V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)=b_4c_{23}q_{\alpha_2,2}(\beta)\left[U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(b_1R_1)\Psi_{\alpha_2;22}^{1}(\lambda R_1,\lambda r,b_2)-\right.\\&\qquad\left.-U_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(b_1R_1)\Psi_{\alpha_2;12}^{1}(\lambda R_1,\lambda r,b_2)\right],\end{aligned}\tag{13}$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)=b_4c_{23}\left[\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)f_{-\frac{1}{2}+ib_3;12}^{(\mu);2}(chR_2,chr)-\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)f_{-\frac{1}{2}+ib_3;22}^{(\mu);2}(chR_2,chr)\right],$$

$$V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)=\omega_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta)\cos b_4r-\omega_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta)\sin b_4r.$$

В (13) функції, які входять в праву частину визначенні в роботах [1 – 4]. Визначимо спектральну функцію

$$\begin{aligned}V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)=&\,\theta(r)\theta(R_1-r)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)+\\&+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)+\theta(r-R_3)V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta),\end{aligned}\tag{14}$$

спектральну щільність

$$\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)=\frac{\beta}{b_4(\beta)}\left(\left[\omega_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta)\right]^2\right)^{-1}.\tag{15}$$

Наявність спектральної вектор-функції $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)$ спектральної щільності $\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)$ і вагової функції $\sigma(r)$ дозволяє визначити пряме $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}$ і обернене $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{-(\mu)}$ гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду - (Конторо-вича -

Лєбєдєва) 2-го роду - Лежандра 2-го роду - Фур'є, породжене на множині I_3^+ оператором $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{+\infty} g(r)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr + \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 shrdr +$$
$$+\int_{R_3}^{+\infty} g_4(r)V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_4 dr \equiv \tilde{g}_1(\beta)+\tilde{g}_2(\beta)+\tilde{g}_3(\beta)+\tilde{g}_4(\beta) \equiv \tilde{g}(\beta). \quad (16)$$

$$H_{\nu,(\alpha);3}^{-(\mu)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \tilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \quad (17)$$

Математичним обґрунтуванням рівностей (16), (17) є твердження.

<u>Теорема 1</u>. Якщо вектор-функція $f(r) = \left[r^{\alpha_1+\frac{1}{2}}\theta(r)\theta(R_1-r)+r^{\alpha_2-\frac{1}{2}}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+\right.$ $\left.+\sqrt{shr}\,\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)+1\cdot\theta(r-R_3)\right]g(r)$ неперервна, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на множині $(0,+\infty)$, то для будь-якого $r \in I_3^+$ справджується інтегральне зображення:

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)\int_0^{+\infty} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta. \quad (18)$$

Доведення справедливості рівності (18) одержується методом дельта-подібної послідовності, в якості якої служить ядро Діріхле [2].

В основі застосувань запровадженого формулами (16), (17) гібридного інтегрального перетворення до розв'язування задачі (1) – (4) лежить основна тотожність інтегрального перетворення оператора $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$.

<u>Теорема 2</u> (про основну тотожність). Якщо вектор функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\alpha_2}[g_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]; g_4''(r)\}$ неперервна на множині I_3^+ і справджуються умови обмеження

$$\lim_{r\to 0} r^{2\alpha_1+1}\left(V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\frac{dg_1(r)}{dr} - g_1(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta}{dr}\right) = 0,$$
$$\lim_{r\to+\infty}\left(V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\frac{dg_4(r)}{dr} - g_4(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta}{dr}\right) = 0 \quad (19)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)g_{k}(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{j1}^{k},\ j=1{,}2;\ k=\overline{1{,}3}, \quad (20)$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$, визначеного рівністю (5):

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}\left[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right]=-\beta^{2}\tilde{g}(\beta)-\sum_{j=1}^{4}\gamma_{j}^{2}\tilde{g}_{j}(\beta)+\frac{a_{1}^{2}\sigma_{1}R_{1}^{2\alpha_{1}+1}}{c_{11}}\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{21}^{1}-\right.$$
$$\left.-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{11}^{1}\right)+\frac{a_{2}^{2}\sigma_{2}R_{2}^{2\alpha_{2}+1}}{c_{12}}\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),3}(\beta)\omega_{21}^{2}-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),3}(\beta)\omega_{11}^{2}\right)+\frac{a_{3}^{2}\sigma_{4}shR_{3}}{c_{13}}\times \quad (21)$$
$$\times\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),24}(\beta)\omega_{21}^{3}-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),4}(\beta)\omega_{11}^{3}\right),$$

$$Z_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu),k+1}(\beta)=\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)V_{\nu,(\alpha);k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\Bigg|_{r=R_k},\quad j=1{,}2,\quad k=\overline{1{,}3}.$$

Справедливість тотожності (21) перевіряється безпосередньо методом інтегрування частинами два рази з використанням властивостей спектральної функції, функції $g(r)$, базової тотожності (8) й структури $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4.$

Наявність тотожності (21) дає можливість використати запроваджене інтегральне перетворення до розв'язання задачі (1) – (4) за наступною логічною схемою [3–4].

2. Розв'язання задачі (1) – (4). Інтегральне перетворення $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}$ згідно правила (16) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}[\cdots]=\left[\int_{0}^{R_1}\ldots V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_{1}r^{2\alpha_{1}+1}dr\quad \int_{R_1}^{R_2}\ldots V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_{2}r^{2\alpha_{2}-1}dr\right.$$
$$\left.\int_{R_2}^{R_3}\ldots V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_{3}shrdr\quad \int_{R_3}^{+\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_{4}dr\right]. \quad (22)$$

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) в матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_{1}^{2}-a_{1}^{2}B_{\nu,\alpha_1}\right)u_1(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_{2}^{2}-a_{2}^{2}B_{\alpha_2}\right)u_2(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_{3}^{2}-a_{3}^{2}\Lambda_{(\mu)}\right)u_3(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_{4}^{2}-a_{4}^{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_4(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\\ f_4(t,r)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\\ u_4(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\\ g_4(r)\end{bmatrix}. \quad (23)$$

Выпуск 1(69) ч. 2 ISSN 2524-0986

Припустимо, що $\chi_1^2 = \max\{\chi_1^2; \chi_2^2; \chi_3^2; \chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_1^2 = 0$, $\gamma_j^2 = \chi_1^2 - \chi_j^2 \ge 0,\ j = \overline{2,4}$. Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю рядок (22) до задачі (23). Внаслідок тотожності (21) отримуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \chi_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \quad \tilde{u}(t,\beta)\Big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta). \tag{24}$$

Тут прийняті позначення

$$\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{u}_1(t,\beta) + \tilde{u}_2(t,\beta) + \tilde{u}_3(t,\beta) + \tilde{u}_4(t,\beta),$$

$$\tilde{g}(\beta) = \tilde{g}_1(\beta) + \tilde{g}_2(\beta) + \tilde{g}_3(\beta) + \tilde{g}_4(\beta),$$

$$\tilde{F}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) + \frac{c_{12}c_{13}R_1^{2\alpha_1+1}}{c_{21}c_{22}c_{23}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{shR_2}{shR_3}\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{21}^1(t) - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{11}^1(t)\right) +$$

$$+\frac{c_{13}shR_2}{c_{22}c_{212}shR_3}\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),3}(\beta)\omega_{21}^2(t) - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),3}(\beta)\omega_{11}^2(t)\right) +$$

$$\frac{1}{c_{23}}\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),4}(\beta)\omega_{21}^3(t) - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),4}(\beta)\omega_{11}^3(t)\right).$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язок задачі Коші (24) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}\tilde{g}(\beta) + \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau \tag{25}$$

Визначимо: 1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);jk}^{(\mu)}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta, \quad j,k = \overline{1,4}, \tag{26}$$

2) породженні неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\nu,(\alpha);k2}^{j2}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)Z_{\nu,(\alpha);k2}^{(\mu),2}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\,\frac{c_{12}c_{13}R_1^{2\alpha_1+1}}{c_{21}c_{22}c_{23}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{shR_2}{shR_3},$$

$$R_{\nu,(\alpha);k2}^{j3}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)Z_{\nu,(\alpha);k2}^{(\mu),3}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\,\frac{c_{13}}{c_{22}c_{23}}\frac{shR_2}{shR_3}, \tag{27}$$

$$R_{\nu,(\alpha);k2}^{j4}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)Z_{\nu,(\alpha);k2}^{(\mu),4}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\,\frac{1}{c_{22}}, \quad j = \overline{1,4},\ k = 1,2.$$

Оператор $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{-(\mu)}$ згідно правила (17) як обернений до (23) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$\mathrm{H}^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}[\ldots]=\begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (28) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ однозначно визначено формулою (25). Після низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1) – (4)

$$u_j(t,r)=\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)\right]\sigma_1\tau^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)\left[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)\right]\sigma_2\tau^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)\left[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)\right]\sigma_3 sh\tau d\rho d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_3}^{+\infty}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j4}(t-\tau,r,\rho)\left[f_4(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_4(\rho)\right]\sigma_4 d\rho d\tau+ \quad (29)$$
$$+\sum_{m=2}^{4}\int\limits_0^t\left[R^{jm}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{21}(\tau)-R^{jm}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{11}(\tau)\right]d\tau,\quad j=\overline{1,4}.$$

Тут $\delta_+(\tau)$ –дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$.

<u>*Висновки.*</u> Вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r);u_4(t,r)\}$, де $u_j(t,r)$ визначені формулою (29) описує в точній аналітичній формі тепловий процес в даному середовищі. Алгоритмічний характер формул (29) дозволяє використовувати одержаний розв'язок як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ:

1. Готинчан Г. І. Гібридні інтегральні перетворення типу Ганкеля – (Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду – Лежандра 2-го роду – Фур'є на полярній вісі. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь*: зб. наук. пр. Чернівці: Прут, 2005. Вип. 12. С. 84-120.
2. Готинчан І. З., Готинчан Г. І. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича - Лєбєдєва) – Фур'є – Бесселя – Ейлера на сегменті полярної осі. *Математичне та*

комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико - математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець - Подільський національний університет ім. І. Огієнка. Кам'янець – Подільський: Кам'янець – Подільський національний університет ім. І. Огієнка, 2013. Вип. 8. С. 33-51.

3. Готинчан І. З. Побудова розв'язку алгоритмічного характеру задачі квазістатики в багатошарових напівобмежених тілах методом гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду – Лежандра 2-го роду -(Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду – Фур'є. *Актуальные научные исследования в современном мире:* сб. научных трудов. Переяслав-Хмельницкий: ИСТ, 2020. Вып. 3 (59), ч.1. С. 95-100
4. Готинчан І. З. Побудова розв'язку алгоритмічного характеру задачі статики в багатошарових напівобмежених тілах методом гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду – Лежандра 2-го роду -(Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду – Фур'є. *Актуальные научные исследования в современном мире:* сб. научных трудов. Переяслав-Хмельницкий: ИСТ, 2020. Вып. 2 (58), ч.2. С. 117-123.