УДК 517.91:532.2

Готинчан Ірина Зіновіївна
ЧТЕІ КНТЕУ
(Чернівці, Україна)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ АЛГОРИТМІЧНОГО ХАРАКТЕРУ ЗАДАЧІ КВАЗІСТАТИКИ В БАГАТОШАРОВИХ НАПІВОБМЕЖЕНИХ ТІЛАХ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ – ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ - (КОНТОРОВИЧА - ЛЄБЄДЄВА) 2-ГО РОДУ - ФУР'Є

Анотація. *Методами гібридного інтегрального перетворення типу Ганкеля 2-го роду – Лежандра 2-го роду – (Конторовича - Лєбєдева) 2-го роду – Фур'є на полярній осі та фундаментальних функцій побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру задачі квазістатики для кусково-однорідного чотирискладового середовища.*

Ключові слова*: гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, дельта – подібна послідовність, спектральна вектор-функція, спектральна щільність.*

Готинчан Ирина Зиновьевна
ЧТЭИ КНТЭУ
(Черновцы, Украина)

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА ЗАДАЧ КВАЗИСТАТИКИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДА - ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДА - (КОНТОРОВИЧА - ЛЕБЕДЕВА) 2-ГО РОДА - ФУРЬЕ

Аннотация. *Методами гибридного интегрального преобразования типа Ганкеля 2-го рода - Лежандра 2-го рода - (Конторовича - Лебедева) 2-го рода - Фурье на полярной оси и фундаментальных функций построено точное аналитическое решение алгоритмического характера задачи кквазистатики для кусочно-однородной четырехслойной среды.*

Ключевые слова: *гибридный дифференциальный оператор, гибридное интегральное преобразование, дельта - подобная последовательность, спектральная вектор-функция, спектральная плотность.*

Hotynchan Iryna Zinoviyivna
CHTIE KNTUE
(Chernivtsi, Ukraine)

CONSTRUCTION OF THE SOLUTION OF THE ALGORITHMIC CHARACTER THE QUASISTATIC PROBLEM IN THE MULTILAYER SEMI-BOUNDED BODIES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORMATION OF THE TYPE HANKEL OF 2-ND KIND - LEGENDRE OF 2-ND KIND - (CONTOROVICH - LEBEDEVA) OF 2-ND KIND - FOURIER

Abstract. *The methods of the hybrid integral transformation of the type Hankel of 2-nd kind - Legendre of 2-nd kind - (Contorovich - Lebedeva) of 2-nd kind - Fourier and the fundamental functions for constructed an exact analytic solution of the algorithmic naturel of the quasistatic problem for a piecewise homogeneous four-component medium*

Keywords: *hybrid differential operator, hybrid integral transformation, delta - like sequence, spectral vector function, spectral density.*

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області

$$D_3 = \{(t,r): t \in (0,+\infty), r \in I_3^+ = (R_0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,R_3)\cup(R_3,+\infty); R_0 > 0\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу

$$\frac{\partial u_1(t,r)}{\partial t} + \chi_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 \mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}[u_1(t,r)] = f_1(t,r), \quad r \in (R_0,R_1)$$

$$\frac{\partial u_2(t,r)}{\partial t} + \chi_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2(t,r)] = f_2(t,r), \quad r \in (R_1,R_2)$$

$$\frac{\partial u_3(t,r)}{\partial t} + \chi_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 \mathrm{B}_{\alpha_2}[u_3(t,r)] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2,R_3) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_4(t,r)}{\partial t} + \chi_4^2 u_4(t,r) - a_4^2 \frac{\partial^2 u_4(t,r)}{\partial r^2} = f_4(t,r), \quad r \in (R_3,+\infty)$$

за початковими умовами

$$u_i(t,r)\big|_{t=0} = g_i(r), \quad r \in (R_{i-1},R_i), \quad i = \overline{1,4},\ R_4 = +\infty, \qquad (2)$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{j1}^k(t),\ j = 1,2,\ k = \overline{1,3}, \qquad (3)$$

та крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_1(t,r)\Bigg|_{r=R_0} = g_0(t),\ \lim_{r\to+\infty} \frac{\partial^m u_4(t,r)}{\partial r^m} = 0,\ m = 0,1, \qquad (4)$$

де $a_i > 0$, $\chi_i^2 \ge 0$, $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $i = \overline{1,4}$, $j,m = 1,2$, $k = \overline{1,3}$; $\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_1 + 1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2 - \alpha_1}{r^2}$, $\nu \ge \alpha_1 \ge -\frac{1}{2}$ -

диференціальний оператор Бес-селя з виродженням в групі молодших [2]; узагальнений диференціальний оператор Лежандра - $\Lambda_{(\mu)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{1-chr} + \frac{\mu_2}{1+chr}\right), \quad \mu_1 \geq \mu_2 > -\frac{1}{2}$ [2]; диференціальний оператор Бесселя з виродженням в групі старших [2]

$$\mathrm{B}_{\alpha_2} = r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_2+1)r\frac{\partial}{\partial r} + \alpha_2 - \lambda^2 r^2, \alpha_2 > -\frac{1}{2}, \lambda \in (0,+\infty);$$

$\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ - диференціальний оператор Фур'є [2].

Ефективним методом побудови розв'язку задачі (1) - (4) служить спеціально запроваджене в роботі [1] ГІП типу Ганкеля 2-го роду – Лежандра 2-го роду – (Конторовича – Лєбєдєва) 2-го роду – Фур'є на полярній осі, породжене на множині I_3^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)} = a_1^2\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1} + a_2^2\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\Lambda_{(\mu)} + a_3^2\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\mathrm{B}_{\alpha_2} + \\ + a_4^2\theta(r-R_3)\frac{d^2}{dr^2}, \quad (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2), \quad (\mu)=(\mu_1,\mu_2): \tag{5}$$

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}[g(r)] = \int_{R_0}^{+\infty} g(r)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \\ + \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 shrdr + \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr + \\ + \int_{R_3}^{+\infty} g_4(r)V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_4 dr = \tilde{g}_1(\beta) + \tilde{g}_2(\beta) + \tilde{g}_3(\beta) + \tilde{g}_4(\beta) \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{6}$$

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{-(\mu)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \tilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{7}$$

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}\left[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)g_0 - \\ - \sum_{j=1}^{4}\gamma_j^2\tilde{g}_j(\beta) + \sum_{j=1}^{3} d_j\left(\mathrm{Z}_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{21}^j - \mathrm{Z}_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{11}^j\right) \tag{8}$$

Тут $\theta(x)$ - одинична функція Хевісайда; $V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)$, $j=\overline{1,4}$, [1] - компоненти дійсної спектральної $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta) = \left\{V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta); V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta); V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta); V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\right\}$ век-тор-функції, яка відповідає ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$; $\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta) = \frac{\beta}{b_4(\beta)}\left(\left[\omega_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta)\right]^2 + \left[\omega_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta)\right]^2\right)^{-1}$ - спектральна щільність; $\sigma_4 = \frac{1}{a_4^2}$, $\sigma_3 = \frac{1}{a_3^2}\frac{c_{13}}{c_{23}}\frac{1}{R_3^{2\alpha_2+1}}$,

$$\sigma_2 = \frac{1}{a_2^2}\frac{c_{12}c_{13}}{c_{22}c_{23}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2\alpha_2+1}\frac{1}{shR_2}, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{a_1^2}\frac{c_{11}c_{12}c_{13}}{c_{21}c_{22}c_{23}}\frac{1}{R_3^{2\alpha_2+1}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2\alpha_2+1}\frac{shR_1}{shR_2}$$ -

компоненти вагової функції

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 shr + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1} +$$

$$+\theta(r-R_3)\sigma_4 \tag{9}$$

У формулі (8) прийняті позначення:

$$Z^{(\mu),k+1}_{\nu,(\alpha);j2}(\beta) = \left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j2}\right)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}, \qquad d_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1},$$

$$d_2 = a_2^2\sigma_2 shR_2 c_{12}^{-1}, \quad d_3 = a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}c_{13}^{-1}, \quad j = 1,2,\ k = \overline{1,3}.$$

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_1^2 - a_1^2 \mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}\right)u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_2^2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}\right)u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_3^2 - a_3^2 \mathrm{B}_{\alpha_2}\right)u_3(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_4^2 - a_4^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_4(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \\ f_4(t,r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \\ u_4(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \\ g_4(r) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Інтегральний оператор $\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}$ згідно правила (6) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}[\cdots] = \Bigg[\int_{R_0}^{R_1}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 shrdr$$

$$\int_{R_2}^{R_3}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \quad \int_{R_3}^{+\infty}\ldots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta)\sigma_4 dr\Bigg]. \tag{11}$$

Припустимо, що $\chi_1^2 = \max\{\chi_1^2; \chi_2^2; \chi_3^2; \chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_j^2 = = \chi_1^2 - \chi_j^2 \geq 0,\ \ j = \overline{1,4}$. Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (11) до задачі (10). Внаслідок тотожності (8) отримуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \chi_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \qquad \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta). \tag{12}$$

Тут прийняті позначення:

$$\tilde{u}(t,\beta)=\sum_{i=1}^{4}\tilde{u}_i(t,\beta),\quad \tilde{g}(\beta)=\sum_{i=1}^{4}\tilde{g}_i(\beta),\quad \tilde{f}(t,\beta)=\sum_{i=1}^{4}\tilde{f}_i(t,\beta),$$

$$\tilde{F}(t,\beta)=\tilde{f}(t,\beta)-a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)g_0(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{3}d_j\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{21}^j(t)-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{11}^j(t)\right).$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язок задачі Коші (12) є функція [3]

$$\tilde{u}(t,\beta)=e^{-\left(\beta^2+\chi_1^2\right)t}+\int_0^t e^{-\left(\beta^2+\chi_1^2\right)(t-\tau)}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau. \qquad (13)$$

Визначимо: 1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\beta^2+\chi_1^2\right)t}V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta,\ j,k=\overline{1,4},$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\nu,(\alpha);k2}^{(\mu),jm}(t,r)=\frac{2}{\pi}\cdot d_{m-1}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\beta^2+\chi_1^2\right)t}V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)Z_{\nu,(\alpha);k2}^{(\mu),m}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta,$$

$$j=\overline{1,4},\quad k=1,2,\quad m=\overline{2,4}.$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(t,r)=\frac{2}{\pi}\frac{a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}}{\left(-\alpha_{11}^0\right)}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\beta^2+\chi_1^2\right)t}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta,\ j=\overline{1,4},$$

Оператор $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{-(\mu)}$ згідно правила (7) як обернений до (11) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{-(\mu)}[\cdots]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (14) за правилом множення матриць до матриці-елементу $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ однозначно визначена формулою (13). Після низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1) – (4):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)\right]\sigma_1\rho^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)\left[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)\right]\sigma_2 sh\rho d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)\left[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)\right]\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_3}^{+\infty}\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j4}(t-\tau,r,\rho)\left[f_4(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_4(\rho)\right]\sigma_4 d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{m=2}^{4}\int_0^t\left[R^{jm}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{21}(\tau)-R^{jm}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{11}(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau,\quad j=\overline{1,4}. \qquad (15)$$

Тут $\delta_+(\tau)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$.

Висновок. вектор-функція $u(r,z)=\{u_1(r,z);u_2(r,z);u_3(r,z);u_4(r,z)\}$, де $u_j(r,z)$ визначені формулою (15), описує в точній аналітичній формі тепловий процес в даному середовищі. Алгоритмічний характер формули (15) дозволяє використовувати одержаний розв'язок як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Готинчан Г.І. Гібридні інтегральні перетворення типу Ганкеля – (Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду – Лежандра 2-го роду – Фур'є на полярній вісі // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2005. – Вип. 12. – С. 84-120.
2. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1/ М.П. Ленюк, М. І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004.- 368 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов - М.: Физматгиз, 1959. - 468 с.