СЕКЦИЯ: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.91:532.2

Готинчан Ірина Зіновіївна
ЧТЕІ КНТЕУ
(Чернівці, Україна)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ АЛГОРИТМІЧНОГО ХАРАКТЕРУ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ В ЧОТИРИШАРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ (КОНТОРОВИЧА - ЛЄБЄДЄВА) – ФУР'Є - БЕССЕЛЯ - ЕЙЛЕРА

Анотація. *Методом гібридного інтегрального перетворення типу (Конторовича – Лєбєдєва) - Фур'є – Бесселя – Ейлера та фундаментальних функцій побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру задачі динаміки для кусково-однорідного чотирискладового середовища.*

Ключові слова*: гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, дельта – подібна послідовність, спектральна вектор-функція, спектральна щільність.*

Готинчан Ирина Зиновьевна
ЧТЭИ КНТЭУ
(Черновцы, Украина)

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В ЧЕТЫРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (КОНТОРОВИЧА - ЛЕБЕДЕВА) - ФУРЬЕ - БЕССЕЛЯ - ЭЙЛЕРА

Аннотация. *Методом гибридного интегрального преобразования типа (Конторовича - Лебедева) - Фурье - Бесселя - Эйлера и фундаментальных функций построено точное аналитическое решение алгоритмического характера задачи динамики для кусочно однородной четырехслойной среды.*

Ключевые слова: *гибридный дифференциальный оператор, гибридное интегральное преобразование, дельта - подобная последовательность, спектральная вектор-функция, спектральная плотность.*

Hotynchan Iryna Zinoviyivna
CHTIE KNTUE
(Chernivtsi, Ukraine)

CONSTRUCTION OF THE SOLUTION OF THE ALGORITHMIC CHARACTER THE DYNAMICS PROBLEM IN A THREE-DIMENSIONAL ENVIRONMENT BY THE HYBRID INTEGRAL CONVERGENCE METHOD (CONTOROVICH - LEBEIDEVA) - FOURIER - BESSEL - EULER

Abstract. *The method of the hybrid integral transformation of the type (Kontorovich-Lebedev) -Fourier-Bessel-Euler and the fundamental functions for constructed an exact analytic solution of the algorithmic naturel of the dynamics problem for a piecewise homogeneous four-component medium*
Keywords: *hybrid differential operator, hybrid integral transformation, delta - like sequence, spectral vector function, spectral density.*

Розглянемо задачу побудови, обмеженого в області

$$D_3 = \{(t,r): t \in (0,+\infty), r \in I_3^+ = (0;R_1)\cup(R_1;R_2)\cup(R_2;R_3)\cup(R_3;R_4); R_4 < +\infty\},$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u_1(t,r)}{\partial t^2} + \chi_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 B_{\alpha_1}[u_1(t,r)] = f_1(t,r), \quad r \in (0,R_1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(t,r)}{\partial t^2} + \chi_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(t,r)}{\partial r^2} = f_2(t,r), \quad r \in (R_1,R_2)$$

$$\frac{\partial^2 u_3(t,r)}{\partial t^2} + \chi_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}[u_3(t,r)] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2,R_3) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_4(t,r)}{\partial t^2} + \chi_4^2 u_4(t,r) - a_4^2 B_{\alpha_3}^* = f_4(t,r), \quad r \in (R_3,R_4)$$

за початковими умовами

$$u_i(t,r)\big|_{t=0} = \varphi_i(r), \quad \left.\frac{\partial u_i(t,r)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_i(r), \; r \in (R_{i-1},R_i), \quad i=\overline{1,4}, \qquad (2)$$

крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\partial^m u_4(t,r)}{\partial r^m} = 0, m = 0,1, \; \left.\left(\alpha_{22}^4 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^4\right) u_4(t,r)\right|_{r=R_4} = \omega(t), \qquad (3)$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(t,r)\right]\right|_{r=R_k} = \omega_{j1}^k(t), \; j=1,2, \; k=\overline{1,3}, \quad (4)$$

де $a_i > 0$, $\chi_i^2 \ge 0$, $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $i=\overline{1,4}$, $j,m=1,2$, $k=\overline{1,3}$; B_{α_1} - диференціальний оператор Бесселя з виродженням в групі старших [2] $B_{\alpha_1} = r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_1 + 1)r\frac{\partial}{\partial r} + \alpha_1 - \lambda^2 r^2,\ \alpha_1 > -\frac{1}{2},\ \lambda \in (0, +\infty),$ B_{ν,α_2} - диференціальний оператор Бесселя з виродженням в групі молодших [2] $B_{\nu,\alpha_2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_2 + 1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2 - \alpha_2}{r^2},\quad \nu \ge \alpha_2 \ge -\frac{1}{2},$ $B^*_{\alpha_3}$ - диференціальний опера-тор Ейлера [3] $B^*_{\alpha_3} = r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_3 + 1)r\frac{\partial}{\partial r} + \alpha_3^2,$ $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ - диференціальний оператор Фур'є [3].

Для побудови розв'язку задачі (1) – (4) використаємо спеціально запроваджене в роботі [1, с. 42] гібридне інтергральне перетворення $H^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}$ (Конторовича - Лєбєдєва) – Фур'є - Бесселя – Ейлера на сегменті полярної осі.

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \chi_1^2 + a_1^2 \mathrm{B}_{\alpha_1}\right) u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \chi_2^2 + a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \chi_3^2 + a_3^2 \mathrm{B}_{\nu,\alpha_2}\right) u_3(t,r) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \chi_4^2 + a_4^2 \mathrm{B}_{\alpha_3}\right) u_4(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \\ f_4(t,r) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \\ u_4(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \varphi_1(r) \\ \varphi_2(r) \\ \varphi_3(r) \\ \varphi_4(r) \end{bmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \\ u_4(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \\ \psi_3(r) \\ \psi_4(r) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Інтегральне перетворення $H^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}[\cdots] = \Bigg[\int_0^{R_1} \ldots V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\beta)\sigma_2 dr$$

$$\int_{R_2}^{R_3} \ldots V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2 + 1}dr \quad \int_{R_3}^{R_4} \ldots V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\beta)\sigma_4 r^{2\alpha_3 - 1}dr\Bigg]. \tag{7}$$

ISSN 2524-0986

Припустимо, що $\chi_1^2 = \max\{\chi_1^2; \chi_2^2; \chi_3^2; \chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_j^2 = \chi_1^2 - \chi_j^2 \ge 0, \quad j = \overline{1,4}$. Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (7) до задачі (5), (6). Внаслідок тотожності [1, с. 48] отримаємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \left(\chi_1^2 + \beta^2\right)\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \quad \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\beta), \quad \frac{\partial \tilde{u}(t,\beta)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \tilde{\psi}(\beta). \tag{8}$$

Тут прийняті позначення:

$$\tilde{u}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{4} \tilde{u}_j(t,\beta), \qquad \tilde{\varphi}(\beta) = \sum_{j=1}^{4} \tilde{\varphi}_j(\beta), \qquad \tilde{\psi}(\beta) = \sum_{j=1}^{4} \tilde{\psi}_j(\beta),$$

$$\tilde{f}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{4} \tilde{f}_j(t,\beta),$$

$$\tilde{F}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) + \frac{a_4^2 \sigma_4 R_4^{2\alpha_3+1}}{\left(-\alpha_{22}^4\right)} V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(R_4,\beta)\omega(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} d_j \left(\mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),j+1}(\beta)\omega_{21}^{j}(t) - \mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),j+1}(\beta)\omega_{11}^{j}(t)\right).$$

Розв’язком задачі (8) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}}\tilde{\psi}(\beta) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}}\right)\tilde{\varphi}(\beta) +$$
$$+ \int_0^t \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}} \tilde{F}(\tau,\beta)\,d\tau. \tag{9}$$

Визначимо: 1) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;jk}^{(\alpha)}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}} V_{\nu,\alpha_2;j}^{(\alpha)}(r,\beta) V_{\nu,\alpha_2;k}^{(\alpha)}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)\,d\beta, \; j,k = \overline{1,4},$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\nu,\alpha_2;m2}^{(\alpha);k+1,j}(t,r) = \frac{2}{\pi}\cdot d_k \int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}} V_{\nu,\alpha_2;j}^{(\alpha)}(r,\beta) \mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;m2}^{(\alpha),k+1}(\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)\,d\beta,$$

$$j = \overline{1,4}, \quad m = 1,2, \quad k = \overline{1,3}.$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r = R_4$ функції Гріна

$$W_{\nu,\alpha_2;1j}^{(\alpha)}(t,r) = \frac{2}{\pi}\frac{a_4^2\sigma_4 R_4^{2\alpha_3+1}}{\left(-\alpha_{22}^4\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}} V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(R_4,\beta) V_{\nu,\alpha_2;j}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)\,d\beta, \; j = \overline{1,4},$$

Оператор $H_{\nu,\alpha_2}^{-(\alpha)}$ [1, с. 42], як обернений до $H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$, зобразимо у вигляді операторної матриці - стовпця:

$$H_{\nu,\alpha_2}^{-(\alpha)}[\cdots]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (10) за правилом множення матриць до матриці-елементу $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (9). Після низки елементарних перетворень отримаємо єдиний розв'язок гіперболічної задачі (1) – (4):

$$\begin{aligned}u_j(t,r)={}&\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1}\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;j1}^{(\alpha)}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\psi_1(\rho)\right]\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau+\\&+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;j2}^{(\alpha)}(t-\tau,r,\rho)\left[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\psi_2(\rho)\right]\sigma_2 d\rho d\tau+\\&+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;j3}^{(\alpha)}(t-\tau,r,\rho)\left[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\psi_3(\rho)\right]\sigma_3\rho^{2\alpha_2+1}d\rho d\tau+\\&+\int\limits_0^t\int\limits_{R_3}^{R_4}\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;j4}^{(\alpha)}(t-\tau,r,\rho)\left[f_4(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\psi_4(\rho)\right]\sigma_4\rho^{2\alpha_3-1}d\rho d\tau+\\&+\sum_{m=2}^{4}\int\limits_0^t\left[R_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha);jm}(t-\tau,r)\omega_{21}^{m-1}(\tau)-R_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha);jm}(t-\tau,r)\omega_{11}^{m-1}(\tau)\right]d\tau+\\&+\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\int\limits_0^{R_1}\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;j1}^{(\alpha)}(t-\tau,r,\rho)\varphi_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;j2}^{(\alpha)}(t-\tau,r,\rho)\varphi_2(\rho)\sigma_2 d\rho+\\&+\int\limits_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;j3}^{(\alpha)}(t-\tau,r,\rho)\varphi_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+\int\limits_{R_3}^{R_4}\mathrm{H}_{\nu,\alpha_2;j4}^{(\alpha)}(t-\tau,r,\rho)\varphi_4(\rho)\sigma_4\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\Bigg]+\\&+\int\limits_0^t W_{\nu,\alpha_2;j}^{(\alpha)}(t-\tau,r)\omega(\tau)d\tau,\quad j=\overline{1,4}.\end{aligned} \tag{11}$$

Тут $\delta_+(\tau)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$.

 ISSN 2524-0986

Висновок. вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r);u_4(t,r)\}$, де $u_j(t,r)$ визначені формулою (11), описує в точній аналітичній формі динамічний процес в даному середовищі. Алгоритмічний характер формули (11) дозволяє використовувати одержаний розв’язок як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ:

1. Готинчан І.З. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича - Лєбєдева) – Фур’є – Бесселя – Ейлера на сегменті полярної осі / І.З. Готинчан, Г.І. Готинчан // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико – математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Кам’янець – Подільський національний університет ім. І. Огієнка. - Кам’янець – Подільський: Кам’янець – Подільський національний університет ім. І. Огієнка, 2013. – Вип. 8. – С. 33-51.
2. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1/ М.П. Ленюк, М. І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004.- 368 с.
3. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера - (Фур'є, Бесселя) / М.П. Ленюк. – Львів, 2009. - 76 с. - (Препринт/НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 02.09) – Чернівці: Прут, 2009. - 76 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов - М.: Физматгиз, 1959. - 468 с.