СЕКЦИЯ: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.91:532.2

Готинчан Ірина Зіновіївна
ЧТЕІ КНТЕУ,
Готинчан Георгій Іванович
Гімназія 2
(Чернівці, Україна)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ АЛГОРИТМІЧНОГО ХАРАКТЕРУ ЗАДАЧІ КВАЗІСТАТИКИ В ЧОТИРИШАРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ (КОНТОРОВИЧА - ЛЄБЄДЄВА) – ФУР'Є - БЕССЕЛЯ - ЕЙЛЕРА

Анотація. *Методом гібридного інтегрального перетворення типу (Конторовича – Лєбєдєва) - Фур'є – Бесселя – Ейлера та фундаментальних функцій побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру задачі квазістатики для кусково-однорідного чотирискладового середовища.*

Ключові слова*: гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, дельта – подібна послідовність, спектральна вектор-функція, спектральна щільність.*

Готинчан Ирина Зиновьевна
ЧТЭИ КНТЭУ,
Готинчан Георгий Иванович
Гимназия 2
(Черновцы, Украина)

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА ЗАДАЧИ КВАЗИСТАТИКИ В ЧЕТЫРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (КОНТОРОВИЧА - ЛЕБЕДЕВА) - ФУРЬЕ - БЕССЕЛЯ - ЭЙЛЕРА

Аннотация. *Методом гибридного интегрального преобразования типа (Конторовича - Лебедева) - Фурье - Бесселя - Эйлера и фундаментальных функций построено точное аналитическое решение алгоритмического характера задачи квазистатики для кусочно однородного четырехслойной среды.*

Ключевые слова: *гибридный дифференциальный оператор, гибридное интегральное преобразования, дельта - подобная последовательность, спектральная вектор-функция, спектральная плотность.*

Hotynchan Iryna Zinoviyivna
CHTIE KNTUE,
Hotynchan Heorhii Ivanovich
Gymnasium 2
(Chernivtsi, Ukraine)

CONSTRUCTION OF THE SOLUTION OF THE ALGORITHMIC CHARACTER THE QUASISTATIC PROBLEM IN A THREE-DIMENSIONAL ENVIRONMENT BY THE HYBRID INTEGRAL CONVERGENCE METHOD (CONTOROVICH - LEBEIDEVA) - FOURIER - BESSEL - EULER

Abstract. *The method of the hybrid integral transformation of the type (Kontorovich-Lebedev) -Fourier-Bessel-Euler and the fundamental functions for constructed an exact analytic solution of the algorithmic naturel of the quasistatic problem for a piecewise homogeneous four-component medium*
Keywords: *hybrid differential operator, hybrid integral transformation, delta - like sequence, spectral vector function, spectral density.*

Розглянемо задачу побудови, обмеженого в області

$$D_3 = \{(t,r): t \in (0,+\infty), r \in I_3^+ = (0;R_1)\cup(R_1;R_2)\cup(R_2;R_3)\cup(R_3;R_4); R_4 < +\infty\}$$

,

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу

$$\frac{\partial u_1(t,r)}{\partial t} + \chi_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 B_{\alpha_1}[u_1(t,r)] = f_1(t,r), \quad r \in (0,R_1)$$

$$\frac{\partial u_2(t,r)}{\partial t} + \chi_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(t,r)}{\partial r^2} = f_2(t,r), \quad r \in (R_1,R_2)$$

$$\frac{\partial u_3(t,r)}{\partial t} + \chi_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}[u_3(t,r)] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2,R_3) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_4(t,r)}{\partial t} + \chi_4^2 u_4(t,r) - a_4^2 B_{\alpha_3}^{*} = f_4(t,r), \quad r \in (R_3,R_4)$$

за початковими умовами

$$u_i(t,r)\big|_{t=0} = g_i(r), \quad r \in (R_{i-1},R_i), \quad i=\overline{1,4}, \;\; R_0 = 0, \quad R_4 < +\infty, \quad (2)$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right)u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{j1}^k(t), \; j=1,2, \; k=\overline{1,3}, \quad (3)$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left(r^\gamma u_1(t,r)\right) = 0, \; \left(\alpha_{22}^4 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^4\right)u_4(t,r)\Big|_{r=R_4} = g_4(t), \quad (4)$$

 ISSN 2524-0986

де $a_i > 0$, $\chi_i^2 \ge 0$, $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $i = \overline{1,4}$, $j,m = 1,2$, $k = \overline{1,3}$; B_{α_1} - диференціальний оператор Бесселя з виродженням в групі старших [2]

$$B_{\alpha_1} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_1 + 1) r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_1 - \lambda^2 r^2, \alpha_1 > -\frac{1}{2}, \lambda \in (0, +\infty),$$

B_{ν,α_2} - диференціальний оператор Бесселя з виродженням в групі молодших [2]

$$B_{\nu,\alpha_2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_2 + 1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2 - \alpha_2}{r^2}, \quad \nu \ge \alpha_2 \ge -\frac{1}{2},$$

$B^*_{\alpha_3}$ - диференціальний оператор Ейлера [3]

$$B^*_{\alpha_3} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_3 + 1) r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_3^2,$$

$\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ - диференціальний оператор Фур'є [3].

Для побудови розв'язку задачі (1) – (4) використаємо спеціально запроваджене в роботі [1, с. 42] гібридне інтергральне перетворення $H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ (Конторовича - Лєбєдєва) – Фур'є - Бесселя – Ейлера на сегменті полярній осі.

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_1^2 - a_1^2 B_{\alpha_1}\right) u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_2^2 - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_3^2 - a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}\right) u_3(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_4^2 - a_4^2 B^*_{\alpha_3}\right) u_4(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \\ f_4(t,r) \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \\ u_4(t,r) \end{bmatrix} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \\ g_4(r) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Інтегральне перетворення $H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}[\cdots] = \left[\int_0^{R_1} \ldots V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta) \sigma_2 dr \right.$$

$$\left. \int_{R_2}^{R_3} \ldots V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr \qquad \int_{R_3}^{R_4} \ldots V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_4 r^{2\alpha_3-1}dr \right]. \quad (6)$$

Припустимо, що $\chi_1^2 = \max\{\chi_1^2; \chi_2^2; \chi_3^2; \chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_j^2 = \chi_1^2 - \chi_j^2 \geq 0, \quad j = \overline{1,4}$. Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю - рядок (6) до задачі (5). Внаслідок основної тотожності [1, c. 48] отримаємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \chi_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \qquad \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta). \quad (7)$$

Тут прийняті позначення: $\tilde{u}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{4}\tilde{u}_j(t,\beta), \quad \tilde{g}(\beta) = \sum_{j=1}^{4}\tilde{g}_j(\beta),$

$$\tilde{f}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{4}\tilde{f}_j(t,\beta),$$

$$\tilde{F}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) - \sum_{i=1}^{4}k_1^2\tilde{g}_i(\beta) - \frac{a_4^2\sigma_4 R_4^{2\alpha_3+1}}{\alpha_{22}^4}V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(R_4,\beta)g_4(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3}d_j\left(Z_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),j}(\beta)\omega_{2j}(t) - Z_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),j}(\beta)\omega_{1j}(t)\right).$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (7) є функція [4]

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}\tilde{g}(\beta) + \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau. \quad (8)$$

Оператор $H_{\nu,\alpha_2}^{-(\alpha)}$ [1, c. 42], як обернений до $H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$, зобразимо у вигляді операторної матриці - стовпця:

$$H_{\nu,\alpha_2}^{-(\alpha)}[\cdots] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Застосуємо операторну матрицю - стовпець (9) за правилом множення матриць до матриці - елементу $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$, однозначно визначена формулою (8). Після низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1) - (4):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\int_0^{R_1}\mathrm{H}^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)\right]\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j2}(t-\tau,r,\rho)\left[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)\right]\sigma_2 d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j3}(t-\tau,r,\rho)\left[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)\right]\sigma_3\rho^{2\alpha_2+1}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_3}^{R_4}\mathrm{H}^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j4}(t-\tau,r,\rho)\left[f_4(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_4(\rho)\right]\sigma_4\rho^{2\alpha_3-1}d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{m=2}^{4}\int_0^t\left[R^{jm}_{\nu,\alpha_2;12}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{21}(\tau)-R^{jm}_{\nu,\alpha_2;22}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{11}(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t W^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(t-\tau,r)g_4(\tau)d\tau,\quad j=\overline{1,4}. \tag{10}$$

Тут беруть участь головні розв'язки даної параболічної задачі:

1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathrm{H}^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;k}(\rho,\beta)\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)d\beta,\ j,k=\overline{1,4},$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження (3) функції Гріна

$$R^{jm}_{\nu,\alpha_2;k2}(t,r)=\frac{2}{\pi}\cdot d_{m-1}\int_0^{+\infty}e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)Z^{(\alpha),m}_{\nu,\alpha_2;k2}(\beta)\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)d\beta,$$

$$j=\overline{1,4},\quad k=1,2,\quad m=\overline{2,4}.$$

3) породжені крайовою умовою (4) в точці $r=R_4$ функції Гріна

$$W^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(t,r)=\frac{2}{\pi}\frac{a_4^2\sigma_4R_4^{2\alpha_3+1}}{\left(-\alpha^4_{22}\right)}\int_0^{+\infty}e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(R_4,\beta)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)d\beta,\ j=\overline{1,4},$$

$\delta_+(\tau)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$.

Висновок. Вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r);u_4(t,r)\}$, де $u_j(t,r)$ визначені формулою (10), описує в точній аналітичній формі тепловий процес в даному середовищі. Алгоритмічний характер формули (10) дозволяє використовувати одержаний розв'язок як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

Выпуск 10(42) ч. 2 ISSN 2524-0986

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ:

1. Готинчан І.З. Гібридне інтегральне перетворення (Конторовича - Лєбєдева) – Фур'є – Бесселя – Ейлера на сегменті полярної осі / І.З. Готинчан, Г.І. Готинчан // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико – математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець – Подільський національний університет ім. І. Огієнка. - Кам'янець – Подільський: Кам'янець – Подільський національний університет ім. І. Огієнка, 2013. – Вип. 8. – С. 33-51.
2. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1/ М.П. Ленюк, М. І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004.- 368 с.
3. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера - (Фур'є, Бесселя) / М.П. Ленюк. – Львів, 2009. - 76 с. - (Препринт/НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 02.09) – Чернівці: Прут, 2009. - 76 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов - М.: Физматгиз, 1959. - 468 с.